УДК 517.946

Ю. И. Ковач, С. А. Бойцун

Задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения с частными производными

В двустороннем аналитическом методе, как и для других аналитических методов, при вычислении приближенного решения некоторой задачи, приходится вычислять большое количество квадратур, что приводит к значительным трудностям. Если количество квадратур уменьшить, заменив их простыми операциями (умножения функций на числовые параметры и др.), и при этом получить более точный результат в приближенном интегрировании поставленной задачи, что достигается за счет ускоренной сходимости процесса, то такие алгоритмы будут представлять определенный теоретический и практический интерес.

Некоторые способы улучшения сходимости этих аналитических двусторонних методов исследуются в работах [1—3].

Приведем некоторые модификации с ускоренными процессом сходимости двусторонних аналитических алгоритмов для более широких областей на примере задачи Коши.

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^r U(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} = f[x, y, \lambda, U] \equiv f\left(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, U(x, y), \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-\mu-\nu} U(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}}\right), \quad 0 < \mu + \nu \leqslant r = s + k, \tag{1}$$

$\mu = 0, 1, 2, \ldots, s$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$; $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ — параметры. Обозначим через $\overline{R} = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha, \quad y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + \beta, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0\}$ область, образованную двумя парами характеристик уравнения (1), которые проходят через концы кривой $l: y = \varphi(x)$, а через $x = \psi(y)$ — уравнение кривой l, разрешенное относительно x. Считаем, что l — гладкая кривая, а $dy/dx = \varphi'(x) > 0$.

Пусть

$$\left.\frac{\partial^{n+q} \omega(x, y)}{\partial x^n \partial y^q}\right|_l = \left.\frac{\partial^{n+q} \omega(x, y)}{\partial x^n \partial y^q}\right|_l, \tag{2}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots, s$; $q = 0, 1, 2, \ldots, k$; $n + q < r$, где $\omega(x, y)$ — известная функция, причем $\partial^r \omega(x, y)/\partial x^s \partial y^k = 0$.

Пусть в области $\overline{R} = \overline{R}_1^{\bullet} \cup \overline{R}_2^{\bullet}$, где $\overline{R}_1^{\bullet}$ ($\overline{R}_2^{\bullet}$) — область, содержащаяся над (под) кривой l (см. рис. 3, § 5 в [3]), существуют функции $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$, удовлетворяющие условиям (2) и неравенствам

$$\frac{\partial^r Z_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k} \leqslant \frac{\partial^r V_1(x, y)}{\partial x^s \partial y^k}, \quad (x, y) \in \overline{R},$$
$$\frac{\partial^{r-\mu-\nu} V_1(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{\partial^{r-\mu-\nu} Z_1(x, y)}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \tag{3}$$

при μ — нечетных (четных) и произвольных ν в области $\overline{R}_1^{\bullet}$; при ν — нечетных (четных) и произвольных μ в области $\overline{R}_2^{\bullet}$. Практический метод построения функций $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$ приведен в [3].

Воспользуемся обозначениями [3]:

$$\int\limits_{\psi(y)}^{x} d\xi \int\limits_{\varphi(\xi)}^{y} \frac{(x-\xi)^{s-1}}{(s-1)!} \frac{(y-\eta)^{k-1}}{(k-1)!} f[\xi, \eta, \lambda, U]\, d\eta = Hf[\xi, \eta, \lambda, U],$$

$$S[Z_p - V_p] \equiv S[W_p] = \sum_{\mu,\nu} N_{s-\mu,k-\nu} \frac{\partial^{r-\mu-\nu} W_p[x, y, \lambda]}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}} \times$$
$$\times \operatorname{sign}[(y - \varphi(x))^{\nu} (x - \psi(y))^{\mu}]; \quad \sum_{\mu,\nu} = \sum_{\mu=0}^{s} \sum_{\nu=0}^{k}, \quad \mu + \nu > 0;$$

$$\overline{E} = \{\lambda_1^{(0)} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(0)} \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_m^{(0)} \leqslant \lambda_m \leqslant \lambda_m^{(1)}\};$$

$$Z_p[x, y, \lambda] \equiv Z_p(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \quad V_p[x, y, \lambda] \equiv V_p(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m);$$

$$p_{s-\mu,k-\nu}(x, y) = \partial^{r-\mu-\nu} U(x, y)/\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu};$$

R_p, Q_p, D_p, C_p — некоторые неотрицательные параметры, удовлетворяющие условию

$$0 \leqslant R_p < Q_p, \ 0 \leqslant D_p < C_p, \ R_p + Q_p = 1, \ D_p + C_p = 1, \ p = 1, 2, 3, \dots, \tag{4}$$

или

$$0 \leqslant Q_p < R_p, \ 0 \leqslant D_p < C_p, \ R_p + Q_p = 1, \ D_p + C_p = 1, \ p = 1, 2, 3, \dots, \tag{5}$$

$$\Omega[W_p] = \sum_{\mu,\nu} \left\{ \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial p_{s-\mu,k-\nu}(x, y)} + N_{s-\mu,k-\nu} \operatorname{sign}[(x - \psi(y))^{\mu} \times \right.$$

$$\left. \times (y - \varphi(x))^{\nu}] \right\} \frac{\partial^{r-\mu-\nu} W_p[x, y, \lambda]}{\partial x^{s-\mu} \partial y^{k-\nu}},$$

где $\partial \widetilde{f} / \partial p_{s-\mu,k-\nu}(x, y)$ — значение производной в некоторой точке рассматриваемой области.

Считаем, что в некоторой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость xoy есть область $\overline{R} = \overline{R}_1^* \cup \overline{R}_2^*$ $(\overline{R} \cup \overline{E} \subset \overline{D})$, правая часть $f[x, y, \lambda, U]$ уравнения (1) — непрерывная функция относительно аргументов x, y и параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и существуют ограниченные производные первого порядка, удовлетворяющие условию

$$|\partial f / \partial p_{s-\mu,k-\nu}(x, y)| \leqslant N_{s-\mu,k-\nu}, \tag{6}$$

а функции $Z_1(x, y)$, $V_1(x, y)$ удовлетворяют условию (2), неравенствам (3) и соотношениям

$$\partial^r Z_1(x, y)/\partial x^s \partial y^k - f[x, y, \lambda, C_1 Z_1 + D_1 V_1] - (C_1 - D_1) S[Z_1 - U_1] = \\ = \alpha_1[x, y, \lambda] \leqslant 0, \tag{7}$$

$$\partial^r V_1(x, y)/\partial x^s \partial y^k - f[x, y, \lambda, C_1 V_1 + D_1 Z_1] + (C_1 - D_1) S[Z_1 - V_1] = \\ = \beta_1[x, y, \lambda] \geqslant 0.$$

Определим последовательности функций $\{Z_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, $\{V_{p+1}[x, y, \lambda]\}$ по закону

$$\begin{aligned} Z_{p+1}[x, y, \lambda] &= Q_p Z_p[x, y, \lambda] + R_p V_p[x, y, \lambda] - \sigma_p[x, y, \lambda], \\ V_{p+1}[x, y, \lambda] &= Q_p V_p[x, y, \lambda] + R_p Z_p[x, y, \lambda] - \omega_p[x, y, \lambda]; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \sigma_p[x, y, \lambda] &= H\{Q_p \alpha_p[\xi, \eta, \lambda] + R_p \beta_p[\xi, \eta, \lambda]\}, \\ \omega_p[x, y, \lambda] &= H\{Q_p \beta_p[\xi, \eta, \lambda] + R_p \alpha_p[\xi, \eta, \lambda]\}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \alpha_p[x, y, \lambda] &= \frac{\partial^r Z_p[x, y, \lambda]}{\partial x^s \partial y^k} - f[x, y, \lambda, C_p Z_p + D_p V_p] - \\ &\quad - (C_p - D_p) S[Z_p - V_p], \\ \beta_p[x, y, \lambda] &= \frac{\partial^r V_p[x, y, \lambda]}{\partial x^s \partial y^k} - f[x, y, \lambda, C_p V_p + D_p Z_p] + \\ &\quad + (C_p - D_p) S[Z_p - V_p]. \end{aligned} \tag{10}$$

Имеют место оценки

$$\left| \frac{\partial^r \{Z_{p+1}[x, y, \lambda] - V_{p+1}[x, y, \lambda]\}}{\partial x^s \partial y^k} \right| \leqslant M \prod_{i=1}^{p} |(Q_i - R_i)(C_i - D_i)| \frac{B^{p-1}}{(p-1)!}, \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial^{r-\mu-\nu}\{Z_{p+1}[x,y,\lambda]-V_{p+1}[x,y,\lambda]\}}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\right|\leqslant M\prod_{i=1}^{p}|(Q_i-R_i)(C_i-D_i)|\frac{B^p}{p!},$$

где M, B — некоторые постоянные.

Справедливы следующие теоремы, доказательство которых получаем методом, приведенным в [3].

Теорема 1. *Пусть в некоторой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость хоу есть область $\overline{R}$ ($\overline{R}\cup\overline{E}\subset\overline{D}$), правая часть $f[x,y,\lambda,U]$ уравнения* (1) *непрерывна относительно аргументов x, y и параметров $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ и существуют ограниченные производные первого порядка $\partial f/\partial p_{s-\mu,k-\nu}(x,y)$, удовлетворяющие условию* (6), *а функции $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$ удовлетворяют условию* (2), *неравенствам* (3) *и соотношению* (7). *Тогда справедливы неравенства*

$$\frac{\partial^r Z_1(x,y)}{\partial x^s\partial y^k}\leqslant\frac{\partial^r U[x,y,\lambda]}{\partial x^s\partial y^k}\leqslant\frac{\partial^r V_1(x,y)}{\partial x^s\partial y^k},\quad (x,y)\in\overline{R},$$

$$\frac{\partial^{r-\mu-\nu}V_1(x,y)}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{\partial^{r-\mu-\nu}U[x,y,\lambda]}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{\partial^{r-\mu-\nu}Z_1(x,y)}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}$$

при μ — нечетных (четных) и произвольных ν в области $\overline{R}_1^*$; при ν — нечетных (четных) и произвольных μ в области $\overline{R}_2^*$.

Теорема 2. *Пусть правая часть $f[x,y,\lambda,U]$ уравнения* (1) *и функции $Z_1(x,y)$, $V_1(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а параметры R_p, Q_p, D_p, C_p, $p=1,2,3,\ldots$, удовлетворяющие условию* (4), *такие, что справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\Omega[Z_p-Z_{p+1}]-D_p\Omega[Z_p-V_p]+S[V_{p+1}-V_p]-D_pS[Z_p-V_p]\leqslant 0,\\ \Omega[V_p-V_{p+1}]+D_p\Omega[Z_p-V_p]+S[Z_{p+1}-Z_p]+D_pS[Z_p-V_p]\geqslant 0;\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}Q_p\{\Omega[Z_p-Z_{p+1}]-D_p\Omega[Z_p-V_p]+S[V_{p+1}-V_p]-D_pS[Z_p-V_p]\}+\\ +R_p\{\Omega[V_p-Z_{p+1}]+D_p\Omega[Z_p-V_p]+S[V_{p+1}-Z_p]+\\ +D_pS[Z_p-V_p]\}\leqslant 0,\end{gathered}\tag{13}$$

$$\begin{gathered}Q_p\{\Omega[V_p-V_{p+1}]+D_p\Omega[Z_p-V_p]+S[Z_{p+1}-Z_p]+D_pS[Z_p-V_p]\}+\\ +R_p\{\Omega[Z_p-V_{p+1}]-D_p\Omega[Z_p-V_p]+S[Z_{p+1}-V_p]-D_pS[Z_p-V_p]\}\geqslant 0\end{gathered}$$

(следовательно, тем более справедливы неравенства $\alpha_{p+1}[x,y,\lambda]\leqslant 0$, $\beta_{p+1}[x,y,\lambda]\geqslant 0$). Тогда последовательности функций $\{Z_{p+1}[x,y,\lambda]\}$, $\{V_{p+1}[x,y,\lambda]\}$, определенные по закону (8) — (10), *удовлетворяют цепи неравенств*

$$\begin{gathered}\frac{\partial^r Z_p[x,y,\lambda]}{\partial x^s\partial y^k}\leqslant\frac{\partial^r Z_{p+1}[x,y,\lambda]}{\partial x^s\partial y^k}\leqslant\ldots\leqslant\frac{\partial^r U[x,y,\lambda]}{\partial x^s\partial y^k}\leqslant\ldots\\ \ldots\leqslant\frac{\partial^r V_{p+1}[x,y,\lambda]}{\partial x^s\partial y^k}\leqslant\frac{\partial^r V_p[x,y,\lambda]}{\partial x^s\partial y^k},\quad (x,y)\in\overline{R},\\ \frac{\partial^{r-\mu-\nu}V_p[x,y,\lambda]}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{\partial^{r-\mu-\nu}V_{p+1}[x,y,\lambda]}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\ldots\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{\partial^{r-\mu-\nu}U[x,y,\lambda]}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\ldots\\ \ldots\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{\partial^{r-\mu-\nu}Z_{p+1}[x,y,\lambda]}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}}\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{\partial^{r-\mu-\nu}Z_p[x,y,\lambda]}{\partial x^{s-\mu}\partial y^{k-\nu}},\end{gathered}\tag{14}$$

$$\mu+\nu>0,\ \mu=0,1,2,\ldots,s;\ \nu=0,1,2,\ldots,k;\ p=1,2,3,\ldots,$$

при μ — *нечетных* (*четных*) *и произвольных* ν *в области* $\overline{R}_1^*$; *при* ν — *нечетных* (*четных*) *и произвольных* μ *в области* $\overline{R}_2^*$. *Если параметры* R_p, Q_p, D_p, C_p, *удовлетворяющие условию* (5), *такие, что знаки в неравенствах* (14) *при* $p = 2\gamma - 1$ ($p = 2\gamma$), $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$, *противоположны* (*совпадают*), *следовательно, справедливы неравенства* $\alpha_{2p}[x, y, \lambda] \geqslant 0$, $\alpha_{2p+1}[x, y, \lambda] \leqslant 0$, $\beta_{2p}[x, y, \lambda] \leqslant 0$, $\beta_{2p+1}[x, y, \lambda] \geqslant 0$, *то вместо цепей неравенств* (14) *получим скачкообразный процес, описанный в* [3]. *Указанные последовательности функций* $\{Z_{p+1}[x, y, \lambda]\}$, $\{V_{p+1}[x, y, \lambda]\}$ *абсолютно и равномерно сходятся соответственно со своими производными до* $r = s + k$-*го порядка включительно к* $U[x, y, \lambda]$ *и соответственным производным от* $U[x, y, \lambda]$, *где* $U[x, y, \lambda]$ — *единственное и непрерывное решение в области* $\overline{R} \cup \overline{E}$ *как функция от* x, y *и параметров* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *задачи* (1), (2). *Это решение непрерывно как функция от параметров* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *в области* $\overline{E}$, *равномерно относительно* x, y *во всей области* $\overline{R}$.

Отметим, что неравенства (13) всегда выполняются в случае $R_p = 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$, однако не исключен случай выполнения неравенств (13), когда 1) $R_p > 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$; 2) $R_p = 0$, $D_p > 0$, $D_{p+1} > 0$; 3) $R_p > 0$, $D_p > 0$, $D_{p+1} > 0$.

Выполнение (13) в случае 1) или 2) влечет ускорение сходимости итерационного процесса (8) по сравнению с итерациями (8) при $R_p = 0$, $D_p = 0$, $D_{p+1} = 0$. В случае 3) процесс (8) сходится быстрее, чем в остальных случаях, причем чем ближе R_p к Q_p и D_p к C_p, тем ближе Z_p к V_p.

Параметры R_p, Q_p и D_p, C_p, удовлетворяющие условию (4) или (5), можно на каждом шаге определить различными способами (см. примечание 3 в [2]).

1. *Приближенное* решение операторных уравнений/М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.— М.: Наука, 1969.— 455 с.
2. *Ковач Ю. И., Галь М. М.* Аналитические двусторонние методы приближенного интегрирования краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дрогобыч: Дрогобыч. пед. ин-т, 1979.— 104 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 334—80 Деп.
3. *Ковач Ю. И., Бойцун С. А.* Модификация аналитического метода приближенного интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных.— Львов: Льв. политехн. ин-т, 1980.— 128 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 9—81 Деп.

Ужгородский
государственный университет

Поступила в редакцию
01.09.1981 г.