УДК 517.5

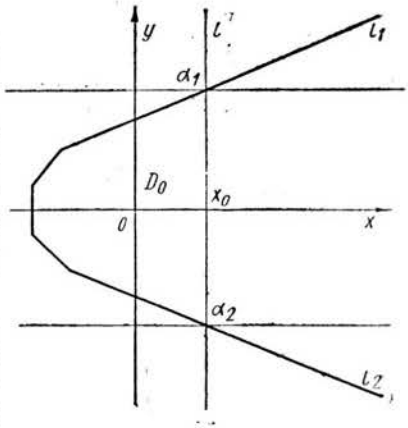
Е. К. Крутиголова

О представлении аналитических функций рядами Дирихле в бесконечных замкнутых выпуклых многоугольных областях

Пусть D — бесконечная выпуклая область, граница которой состоит из двух лучей и дуги, соединяющей начала этих лучей.

В работе [1, с. 524] установлено, что имеется последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$, $0<|\lambda_k|\uparrow\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k}{|\lambda_k|^{\rho}}=\tau$, $0<\tau<\infty$, $\rho>1$, такая, что любая функция $F(z)$, аналитическая в D, представима в D рядом Дирихле

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{\lambda_k z},\quad z\in D. \tag{1}$$



Рассмотрим случай, когда лучи l_1 и l_2 не параллельны. Предположим для определенности, что они наклонены к вещественной оси под углами, равными ψ_0 и $-\psi_0$ соответственно, причем $0<\psi_0<\pi/2$, а начала лучей соединены выпуклой ломаной. Считаем, что точка $z=0\in D$ (см. рисунок). Для такой области установим условия, при выполнении которых представление (1) имеет место в замкнутой области $\overline{D}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть D — бесконечная выпуклая многоугольная область, ограниченная лучами l_1 и l_2, наклоненными к вещественной оси под углами, равными соответственно ψ_0 и $-\psi_0$, $0<\psi_0<\pi/2$, и ломаной линией γ, соединяющей начала этих лучей; $F(z)$ — произвольная функция, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ вместе со своими первыми тремя производными. Тогда имеется последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$, $0<|\lambda_n|\uparrow\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{|\lambda_n|^{\rho}}=\tau$, $0<\tau<\infty$, $\rho>1$, такая, что функцию $F(z)$ можно представить в виде ряда (1), сходящегося абсолютно в $\overline{D}$ и равномерно на любом ограниченном компакте $K\subset\overline{D}$.*

Доказательство. Проведем в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z>0$ вертикальную прямую l так, чтобы она пересекала оба луча, и обозначим через α_1 и α_2 точки ее пересечения с лучами l_1 и l_2 (см. рисунок).

Прямая l отсечет от области D ограниченную выпуклую многоугольную область D_0. Функция $F(z)$ аналитична в D_0 и непрерывна в $\overline{D}_0$ вместе со своими первыми тремя производными. Обозначим через $a_1,\ldots,a_N$, $3\leqslant N<\infty$, вершины многоугольника D_0.

Пусть N — четное число. В работе [2] установлено, что функцию $F(z)$, удовлетворяющую условиям теоремы (1), можно представить в $\overline{D}_0$ в виде

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{(k)}e^{\omega_n^{(k)}z}+p(z),\quad z\in\overline{D}_0, \tag{2}$$

где $p(z)$ — многочлен степени не выше $(N+2)/2$, и

$$\omega_n^{(k)}=2\pi in/(a_{k+1}-a_k),\quad n=1,2,\ldots,\quad k=1,\ldots,N,\quad a_{N+1}\equiv a_1. \tag{3}$$

При этом функции $\varphi_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{\omega_n^{(k)} z}$ — аналитические в полуплоскостях D_k, ограниченных прямыми, проходящими через точки a_k и a_{k+1}($D_0 \subset D_k$, $k = 1, \ldots, N$); непрерывны в $\overline{D}_k$ вместе со своими производными $\varphi_k'(z)$ и периодические с периодом $a_{k+1} - a_k$.

При нечетном N имеет место представление

$$F(z) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{\omega_n^{(k)} z} + e^{\pi i z / a_1 - a_N} \varphi_N(z) + p(z), \tag{4}$$

где

$$\omega_n^{(k)} = \frac{2\pi i n}{a_{k+1} - a_k}, \quad k = 1, \ldots, N-1, \quad \omega_n^N = \frac{2\pi i}{a_1 - a_N}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$
$$n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Положим $\alpha_1 = a_1$ и $\alpha_2 = a_N$ и обозначим через x_0 точку пересечения прямой l с положительной частью вещественной оси.

Запишем правую часть представления (2) в виде

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{\omega_n^{(k)} z} + \varphi_N(z) + p(z) \tag{2'}$$

и обозначим первые слагаемые в (2′) и (4) через $f_1(z)$, т. е.

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{\omega_n^{(k)} z}. \tag{6}$$

Ряд (6) сходится абсолютно в $\overline{D}$ и равномерно на любом ограниченном компакте $K \subset \overline{D}$, ибо каждый из рядов $\varphi_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} e^{\omega_n^{(k)} z}$ сходится абсолютно в $\overline{D}_k$, $k = 1, \ldots, N-1$, и равномерно на любом ограниченном компакте $M_k \subset \overline{D}_k$ и $\overline{D} = \bigcap_{k=1}^{N-1} D_k$ [2].

Кроме того, поскольку каждая из функций $\varphi_k(z)$, $k = 1, \ldots, N-1$, непрерывна в $\overline{D}_k$ вместе со своей первой производной, то и функция $f_1(z)$ непрерывна в $\overline{D}$ вместе со своей производной $f_1'(z)$.

Обозначим через $f_2(z)$ разность $F(z) - f_1(z) \overset{\text{dt}}{=} f_2(z)$, $z \in D$. Так как функции $F(z)$ и $f_1(z)$ аналитические в D, то и функция $f_2(z)$ аналитическая в D.

Заметим, что при $z \in \overline{D}_0$ $f_2(z) = \varphi_N(z) + p(z)$ при четном N, и $f_2(z) = e^{\pi i z / a_1 - a_N} \varphi_N(z) + r(z)$ при нечетном N. Поскольку функция $\varphi_N(z)$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} z < x_0$, то и функция $f_2(z)$ аналитическая в этой полуплоскости. Таким образом, функция $f_2(z)$ аналитическая в полосе $\operatorname{Im} a_N \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \operatorname{Im} a_1$, за исключением, может быть, точек a_1 и a_N. Функция $\varphi_N(z)$ при четном N периодическая с периодом $a_1 - a_N$, а при нечетном N — периодическая с тем же периодом функция $e^{\frac{\pi i z}{a_1 - a_N}} \varphi_N(z)$. Учитывая, что области аналитичности функций $\varphi_N(z)$ и $f_2(z)$ совпадают, в силу отмеченной периодичности находим, что обе эти функции аналитические во всей плоскости, за исключением, может быть, точек $a_N + (a_1 - a_N) k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Покажем, что обе эти функции аналитические и в точках $a_N + (a_1 - a_N) k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Убедимся, что аналитичность имеет место, например, в точке a_1. Действительно, функции $F(z)$, $f_1(z)$ и $\varphi_N(z)$ непрерывные в точке a_1 вместе со своими первыми производными, поэтому функция $f_2(z)$, непрерывна в точке a_1 и имеет в ней непрерывную первую производную. Следовательно, функция $f_2(z)$ аналитическая в точке a_1. В силу отмеченной выше периодичности функции $\varphi_N(z)$ (или функции $e^{\frac{\pi i z}{a_1-a_N}}\varphi_N(z)$ при нечетном N) получим, что функция $f_2(z)$ — аналитическая в точках $a_N+(a_1-a_N)\cdot k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, $f_2(z)$ — целая функция.

Согласно теореме 7.4.4 [см. [1], с. 481] функцию $f_2(z)$ можно представить во всей плоскости в виде ряда $f_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{\mu_k z}$, где μ_k — нули целой функции $L(\lambda)$ уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=1$.

Положив

$$\{\lambda_n\}=\bigcup_{k=1}^{N}\{\omega_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\cup\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty},$$

с учетом (6) получим, что при всех $z\in\overline{D}$ имеет место представление $F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$, где a_n, $n\geqslant 1$, — коэффициенты А. Ф. Леонтьева, которые вычисляются по вполне определенным формулам, и ряд сходится равномерно на любом ограниченном компакте $K\subset\overline{D}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Последовательности (3) и (5) — нули целых функций

$$Q(z)=z^{\frac{N}{2}}e^{\gamma_1 z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\omega_n^{(k)}}\right),\quad \gamma_1=\mathrm{const},$$

если N — четное, и

$$Q(z)=z^{\frac{N-1}{2}}e^{\gamma_1 z}\left(1-\frac{z}{\omega_0^{(k)}}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\omega_m^{(1)}}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{\omega_m^{(N)}}\right)$$

если N — нечетное число. Поэтому коэффициенты a_n, $n\geqslant 1$, по системам (3) и (5) вычисляются, исходя из этих функций.

Замечание 2. Можно несколько ослабить требования, полагаемые на функцию $F(z)$: потребовать, чтобы функция $F(z)$ была аналитической в D и непрерывной на $\overline{D}$ вместе со своими первыми двумя производными.

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, можно найти, что функция $f_2(z)$—аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z>0$. Согласно теореме 8.1.5 (см. [1, с. 520]) ее можно представить в этой полуплоскости рядом вида (1), в котором λ_n — нули целой функции порядка $\rho>1$. Поскольку многочлен $p(z)$ как целую функцию можно представить рядом вида (1) во всей плоскости, то мы получим представление функции $F(z)$ рядами вида (1) в $\overline{D}$. Однако в областях $\overline{D}_0$ и $\overline{D}/\overline{D}_0$ получим представление функции $F(z)$ по разным системам показателей.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.— 536 с.
2. *Леонтьев А. Ф.* О представлении аналитических функций в виде суммы периодических. — Мат. сб., 1974, 93, № 4, с. 512—528.

Дрогобычский
педагогический институт

Поступила в редакцию
02.02.1981 г.