УДК 517.98

И. Г. Майзенберг, С. А. Тарнопольская, М. В. Шапиро

Об интегральных операторах со слабой особенностью в гельдеровских пространствах с весом

Пусть Γ — контур, состоящий из конечного числа замкнутых и разомкнутых гладких жордановых кривых, попарно не имеющих общих точек: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{q} \Gamma_i$. Такой контур будем называть составным. Через $H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \leqslant 1$, обозначим банахово пространство функций, удовлетворяющих на Γ условию Гельдера с показателем μ, наделенное обычной нормой.

Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — некоторые различные точки Γ, называемые узлами, среди которых — все концы разомкнутых дуг, $\rho(t) = \prod_{j=1}^{n} |t - c_j|^{\alpha_j}$, где $\alpha_j \geqslant 0$ — вещественные числа.

Обозначим через $H_\mu^0(c_1, \ldots, c_n)$ подпространство $H_\mu(\Gamma)$, состоящее из исчезающих в узлах функций; $H_\mu^0(\Gamma; \rho) = \{\varphi : \varphi\rho \in H_\mu^0(c_1 \ldots c_n)\}$ (см. [5]).

Цель настоящей статьи — получение достаточных условий компактности действующих в $H_\mu^0(\Gamma; \rho)$ интегральных операторов вида

$$K : \varphi \to \int_\Gamma k(t, \tau) |\tau - t|^{-\lambda} \varphi(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $k(t, \tau) \in H_{\alpha,\beta}(\Gamma \times \Gamma)$, $0 \leqslant \lambda < 1$.

Операторы (1) встречаются, например, в теории сингулярных интегральных операторов, действующих в различных пространствах гельдеровских функций [2—4]. Для пространств $L_p(\Gamma)$ условия компактности операторов (1) хорошо изучены (см., напр., [1]). Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $k(t, \tau) \in H_{\alpha,\beta}(\Gamma \times \Gamma)$ *и выполнены неравенства*

$$\mu < \min(\alpha, 1 - \lambda), \quad \mu < \alpha_j < \mu + 1, \ j = \overline{1, n}; \quad 0 < \beta \leqslant 1. \tag{2}$$

Тогда оператор (1) *компактен в* $H_\mu^0(\Gamma; \rho)$.

Доказательство теоремы следует из ряда вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $M : \varphi \to \int_\Gamma m(t, \tau) \varphi(\tau)\, d\tau$ *действует в* $C(\Gamma)$ *и* $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{q} \Gamma_i$ *представим в виде* $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{n} \gamma_i$, *где* γ_i, $i = \overline{1, n}$, *— односвязные попарно не пересекающиеся дуги, а* γ_0 *— замыкание множества* $\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$. *Тогда оператор M компактен в* $H_\mu(\Gamma)$ *в том и только в том случае, когда компактен каждый оператор*

$$M_{ik} : \varphi(t) \in H_\mu(\gamma_i) \to \int_{\gamma_i} m(t, \tau) \varphi(\tau)\, d\tau, \quad t \in \gamma_k,$$

$$(M_{ik}\varphi(t) \in H_\mu(\gamma_k), \quad i, k = \overline{0, n}.$$

Эта лемма позволяет изучать интегральный оператор в окрестности каждого узла в отдельности.

Очевидно, что компактность оператора K в $H_\mu^0(\Gamma; \rho)$ равносильна компактности оператора $M = \rho K \rho^{-1} I$ в $H_\mu^0(c_1, \ldots, c_n)$.

Обозначим через γ_i дугу, содержащую единственный узел c_i, причем, если c_i не совпадает с одним из концов Γ, то c_i — внутренняя точка γ_i. Систему дуг γ_i, $i=\overline{1,n}$, выберем так, чтобы они попарно не пересекались. Пусть γ_0 имеет тот же смысл, что и в лемме 1. Так как $W(t)=(M\varphi)(t)$ непрерывна во всех концах дуг из γ_0, то справедливость теоремы будет следовать из леммы 1, если мы докажем, что условия теоремы обеспечивают компактность операторов M_{ik} (где $M=\rho K\rho^{-1}I$).

Как следует из [2, с. 173], для этого достаточно доказать, что

$$\| M_{ik}\psi_r \|_{H_\mu(\gamma_k)} \to 0 \text{ при } r\to\infty,$$

где $\{\psi_r\}\subset \overset{0}{H}_\mu(c_i)$ и $\psi_r\to 0$ в $C(\gamma_i)$.

Лемма 2. *Пусть $\xi_1,\xi_2\in\gamma_i$ — две достаточно близкие точки, $\gamma\subset\gamma_i$ — такая дуга, что $\xi_1,\xi_2\in\gamma$. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma}\frac{|\tau-\xi_j|^{\alpha_i-\lambda}}{|\tau-c_i|^{\alpha_i-\mu_1}}\,|d\tau|\leqslant A_1|\xi_1-\xi_2|^{\mu_1},$$

$$\int\limits_{\gamma_i\setminus\gamma}\frac{|\tau-\xi_j|^{\delta-\alpha}}{|\tau-\xi_2|^{\lambda}|\tau-c_1|^{\alpha_1-\mu_1}}\,|d\tau|\leqslant A_2|\xi_1-\xi_2|^{\mu_1+\delta-\alpha_1-\alpha}, \tag{3}$$

где $j=1,2$; $0<\mu<1$; $\mu_1<\alpha_i<\mu_1+1$; $0\leqslant\lambda\leqslant1$; $\mu_1<\alpha$; $\delta=\alpha_i$ *или* $\delta=\alpha$; $0\leqslant\alpha\leqslant1$; A_1, $A_2=\text{const}$.

Неравенства (3) установлены для $\lambda=1$ и $\alpha=1$ в [5] и доказываются в нашем случае аналогичными методами.

Оценивание $\|M_{ik}\psi_r\|_{H_\mu(\gamma_k)}$ производится перебором всех возможных случаев.

1) $i=k\neq0$. Для $t\in\gamma_i$ рассмотрим

$$(M_{ii}\psi_r)(t)=\Psi_{\gamma_i}(t)+F_{\gamma_i}(t)=\int\limits_{\gamma_i}k(t,\tau)|\tau-t|^{-\lambda}\psi_r(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{\gamma_i}k(t,\tau)[\rho(t)-\rho(\tau)]|\tau-t|^{-\lambda}\rho^{-1}(\tau)\psi_r(\tau)\,d\tau.$$

Оценим сначала $\|\Psi_{\gamma_i}\|_{H_\mu(\gamma_i)}$. Имеем $\|\Psi_{\gamma_i}\|_{C(\gamma_i)}\leqslant\text{const}\,\|\psi_r\|_{C(\gamma_i)}$. Представляя $|\Psi_{\gamma_i}(\xi_1)-\Psi_{\gamma_i}(\xi_2)|$ в виде суммы четырех слагаемых (см., напр., [3, с. 52 — 55]), применяя свойства гельдеровских функций [2, с. 22], и учитывая то, что по условию $\mu<\min(\alpha,1-\lambda)$, получаем

$$|\Psi_{\gamma_i}(\xi_1)-\Psi_{\gamma_i}(\xi_2)|\leqslant\text{const}\,\|\psi_r\|_{C(\gamma_i)}|\xi_1-\xi_2|^{\mu}.$$

Отсюда вытекает, что $\|\Psi_{\gamma_i}\|_{H_\mu(\gamma_i)}\to0$, $r\to\infty$. Отметим попутно, что нами фактически здесь доказана компактность оператора (1) в $H_\mu(\Gamma)$ (см. [6, 7, с. 125], где Γ замкнут).

Доказательство того, что $\|F_{\gamma_i}\|_{H_\mu(\gamma_i)}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$, технически громоздко и здесь не приводится. Отметим лишь, что в доказательстве используется лемма 2 из [5] и оба неравенства (3).

2) $0\neq i\neq k\neq0$. Тогда при $t\in\gamma_k$ получаем равенство

$$(M_{ik}\psi_r)(t)=\int\limits_{\gamma_i}\tilde k(t,\tau)|\tau-c_i|^{\mu_1-\alpha_i}u_r(\tau)\,d\tau,$$

в котором $\tilde k(t,\tau)\in H_{\alpha,\beta}$ просто выражается через данные функции; $\mu_1\in(0,\mu)$, $u_r(t)=\psi_r(t)|t-c_i|^{-\mu_1}\to0$, $r\to\infty$, в $C(\gamma_i)$. Из этого равенства вытекает, что

$$\|M_{ik}\psi_r\|_{H_\mu(\gamma_k)}\leqslant\text{const}\,\|u_r\|_{C(\gamma_i)}\to0,\quad r\to\infty.$$

3) $k=i=0$. Тогда при $t\in\gamma_0$

$$(M_{00}\psi_r)(t)=\rho(t)\int\limits_{\gamma_0}k(t,\tau)\,|\tau-t|^{-\lambda}\rho^{-1}(\tau)\,\psi_r(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{\gamma_0}\tilde{\tilde{k}}(t,\tau)\,|\tau-t|^{-\lambda}\psi_r(\tau)\,d\tau,$$

где $\tilde{\tilde{k}}(t,\tau)=\rho(t)\,\rho^{-1}(\tau)\,k(t,\tau)\in H_{\alpha,\beta}(\gamma_0\times\gamma_0)$.

Компактность оператора M_{00} следует теперь из сделанного в п. 1 замечания относительно оценки $\|\Psi_{\gamma_i}\|_{H_\mu(\gamma_i)}$.

4) Пусть либо $i=0$, либо $k=0$. Обозначим $\gamma=\gamma_i\cup\gamma_k$. Применим лемму 1 для $n=1$ и $\Gamma=\gamma$, а γ_0 имеет тот же смысл, что в лемме. Введем оператор

$$\tilde{M}:\varphi\in H_\mu(\gamma)\to\rho(t)\int\limits_{\gamma}k(t,\tau)\,|\tau-t|^{-\lambda}\rho^{-1}(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,\ t\in\gamma,$$

который компактно действует в $H_\mu(\gamma)$ (см. п. 1)). Тогда по лемме 1 операторы M_{ki} и M_{ik} компактны в соответствующих пространствах.

Итак, M — компактный оператор в $H_\mu(\Gamma)$. Аналогично [5] можно показать, что $W(t)=(M\varphi)(t)$ исчезает в узлах $c_1,\ldots,c_n$, т. е. $M=\rho K\rho^{-1}I$ компактен в $H_\mu^0(c_1,\ldots,c_n)$. Отсюда следует компактность оператора K в $H_\mu^0(\Gamma;\rho)$, что и требовалось доказать.

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977. — 742 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.—511 с.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
4. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.— 448 с.
5. *Дудучава Р. В.* Об ограниченности оператора сингулярного интегрирования в гельдеровских пространствах с весом.— Мат. исслед., 1970, 5, вып. 1, с. 56—76.
6. *Шапиро М. В.* Сингулярные интегральные операторы со сдвигом Карлемана в случае кусочнонепрерывных коэффициентов и на составном контуре: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1974.— 101 с.
7. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.— М.: Мир, 1979.— 493 с.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию 05.03.1981 г.
после переработки 25.08.1981 г.