УДК 517.51

В. К. Маслюченко

Об условиях включения пересечений и объединений пространств $L_p(\mu)$ с весом

Пусть $(T, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с σ-аддитивной мерой μ, определенной на σ-алгебре $\mathcal{A}$ измеримых множеств с единицей T и принимающей неотрицательные действительные значения, включая, возможно, и ∞. Будем предполагать, что μ удовлетворяет условию: каждое измеримое подмножество T ненулевой меры содержит измеримую часть ненулевой конечной меры. Обозначим, как обычно, через $L_p(\mu)$ при $0 < p < \infty$ пространство всех μ-суммируемых с p-й степенью функций и при $p = \infty$ пространство всех μ-измеримых существенно ограниченных функций на T.

Для убывающей последовательности $\mathbf{r} = (r_m)_{m=1}^{\infty}$ измеримых положительных функций r_m положим

$$\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu) = \bigcap_{m=1}^{\infty} r_m L_p(\mu),$$

а для возрастающей последовательности $\mathbf{r} = (r_m)_{m=1}^{\infty}$

$$\overline{\mathcal{L}}_p(\mathbf{r}, \mu) = \bigcup_{m=1}^{\infty} r_m L_p(\mu).$$

Цель статьи — получение необходимых и достаточных условий на последовательность $\mathbf{r}$, при которых выполняется включение $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$ $(\overline{\mathcal{L}}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \overline{\mathcal{L}}_q(\mathbf{r}, \mu))$ с фиксированными $0 < p,\ q \leqslant \infty$.

1. Пусть X и Y — подмножества алгебры всех измеримых функций на (T, μ). Множество $X_Y^{*} = \{u\colon uX \subseteq Y\}$ назовем дуальным к X относительно Y, а его элементы — мультипликаторами из X в Y.

Отметим очевидные свойства операции взятия дуального:

1) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow (X_1)_Y^{*} \supseteq (X_2)_Y^{*}$;

2) $\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right)_Y^{*} = \bigcap_{i \in I} (X_i)_Y^{*}$;

3) $(rX)_Y^{*} = r^{-1} X_Y^{*}$.

Кроме этого, используем известную формулу

$$(L_q(\mu))_{L_p(\mu)}^{*} = L_{q^*(p)}(\mu) \tag{1}$$

$\left(\text{здесь } 0 < p \leqslant q \leqslant \infty \text{ и } q^*(p) = \begin{cases} p, & q = \infty, \\ \infty, & q = p, \\ qp/(q-p), & q < \infty \end{cases}\right)$. Из этих замечаний вытекает, что

$$(\overline{\mathcal{L}}_q(\mathbf{r}, \mu))_{L_p(\mu)}^{*} = \mathcal{L}_{q^*(p)}(1/\mathbf{r}, \mu), \quad 0 < p \leqslant q \leqslant \infty. \tag{2}$$

Эта формула послужит в дальнейшем основанием для перенесения результатов этого и следующего пунктов на пространства $\overline{\mathcal{L}}_p(\mathbf{r}, \mu)$, а сейчас исследуем условия включения $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$.

Теорема 1. *Для того чтобы $\mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu)$, где $0 < p < q \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого m существовало такое $\overline{m}$, что $r_{\overline{m}}/r_m \in L_{q^*(p)}(\mu)$.*

Доказательство этого утверждения основывается на таком вспомогательном факте.

Лемма. *Пусть $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых положительных функций на пространстве (T, μ), причем $x_m \notin L_p(\mu)$, $m = 1, 2, \ldots$;*

$(0 < p < \infty)$. *Тогда существует такая дизъюнктная последовательность* $(e_m)_{m=1}^{\infty}$ *измеримых множеств, что* $\int\limits_{e_m} (x_m(t))^p d\mu(t) > 1$ *для каждого* m *и функции* x_m *и* $1/x_m$, $m = 1, 2, \ldots$, *ограничены на каждом из множеств* e_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство леммы. Для простоты считаем, что $p = 1$. Отметим, что из условий, налагаемых на пространство с мерой, вытекает, что для каждой измеримой функции $x \geqslant 0$ на T

$$\int\limits_T x(t)\, d\mu(t) = \sup_{\mu(E) < \infty} \int\limits_E x(t)\, d\mu(t). \tag{3}$$

Используя это, выберем такое множество E конечной меры, чтобы $\int\limits_E x_1 d\mu > 2$ и положим $E_{mk} = \{t \in E : k^{-1} \leqslant x_m(t) \leqslant k\}$. Пусть k_1 — такой номер, что $\int\limits_{E_{1k_1}} x_1 d\mu > 2$, а $(k_m)_{m=2}^{\infty}$ — такая последовательность номеров, что

$$\mu(E_{1k_1} \setminus E_{1k_m}) < 1/k_1 2^m, \quad m = 2, 3, \ldots.$$

Положим $e_1 = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_{mk_m}$. Имеем

$$\int\limits_{e_1} x_1 d\mu = \int\limits_{E_{1k_1}} x_1 d\mu - \int\limits_{E_{1k_1}\setminus e_1} x_1 d\mu > 2 - k_1 \mu(E_{1k_1} \setminus e_1) \geqslant 2 -$$

$$- k_1 \sum_{m=2}^{\infty} \mu(E_{1k_1} \setminus E_{1k_m}) > 2 - k_1 \sum_{m=2}^{\infty} 1/k_1 2^m > 2 - 1 = 1,$$

а вместе с тем $k_m^{-1} \leqslant x_m(t) \leqslant k_m$, $t \in e_1$.

Применяя аналогичное построение к множеству $T \setminus e_1$ вместо T и к функции x_2 вместо x_1, мы придем к множеству e_2 и т. д.

Доказательство теоремы. 1) $q = \infty$. Достаточность условия вытекает из равенства $x/r_m = (x/r_{\overline{m}})(r_{\overline{m}}/r_m)$, где $\overline{m}$ именно то число, для которого $r_{\overline{m}}/r_m \in L_p(\mu)$.

Для доказательства необходимости допустим, что для некоторого k и всех m $r_m/r_k \notin L_p(\mu)$. Пусть $(e_m)_{m=1}^{\infty}$ — последовательность множеств, существование которой гарантируется леммой (в качестве x_m выберем, конечно, r_m/r_k). Положим $x = \sum\limits_{m=1}^{\infty} r_m \varphi_{e_m}$ (тут и далее φ_E — характеристическая функция множества E) и покажем, что $x \in \mathscr{L}_\infty(\mathbf{r}, \mu) \setminus \mathscr{L}_p(\mathbf{r}, \mu)$. Действительно,

$$x/r_m = \sum_{m=1}^{n-1} (r_m/r_n)\, \varphi_{e_m} + \sum_{m=n}^{\infty} (r_m/r_n)\, \varphi_{e_m}.$$

Вторая сумма не превышает 1, ведь $r_m \leqslant r_n$ при $m \geqslant n$, а каждый член первой суммы ограничен, ибо $r_m/r_n = (r_m/r_k)/(r_n/r_k)$. Итак, $x \in \mathscr{L}_\infty(\mathbf{r}, \mu)$. Но

$$\int\limits_T (x/r_k)^p d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{e_m} (r_m/r_k)^p d\mu \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

поэтому $x \notin \mathscr{L}_p(\mathbf{r}, \mu)$.

2) $q < \infty$. Достаточность следует из представления $x/r_m = (x/r_{\overline{m}}) \times (r_{\overline{m}}/r_m)$ и формулы (1).

При доказательстве необходимости, как и в случае $q = \infty$, рассуждаем от противного. Пусть для некоторого k и всех m $r_m/r_k \notin L_{q^*(p)}(\mu)$. Из предыдущего вытекает, что существует такая функция $x \in \mathscr{L}_\infty(\mathbf{r}, \mu)$, что $x/r_k \notin L_{q^*(p)}(\mu)$. Воспользовавшись (1), найдем такое $y \in L_q(\mu)$, что $(xy)/r_k \notin L_p(\mu)$. Теперь ясно, что $xy \in \mathscr{L}_q(\mathbf{r}, \mu) \setminus \mathscr{L}_p(\mathbf{r}, \mu)$.

2. Исследуем условия, при которых выполняется включение $\mathscr{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathscr{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$ с $0 < p < q \leqslant \infty$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p$, $q \leqslant \infty$. *Для того чтобы* $\mathscr{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathscr{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* m *существовало такое* k, *что* $r_k L_p(\mu) \subseteq r_m L_q(\mu)$.

Доказательство. В случае $0 < q < p \leqslant \infty$ утверждение вытекает из теоремы 1 с учетом формулы (1).

Приведем независимое от теоремы 1 рассуждение, которое пригодно в случае конечных p и q. Тем самым получим новое доказательство теоремы 1 для $0 < p < q < \infty$, которое весьма близко к старому.

Пусть для некоторого m и произвольного k $r_k L_p(\mu) \not\subseteq r_m L_q(\mu)$. Тогда существует такая последовательность измеримых функций x_k, что $x_k \geqslant 0$, $x_k/r_k \in L_p(\mu)$ и $x_k/r_m \notin L_q(\mu)$ при $k = 1, 2, \ldots$. Воспользовавшись диагональным приемом, построим функцию $x \in \mathscr{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \setminus \mathscr{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$. На основании (3) выберем такое множество E конечной меры, чтобы

$$\int_{T \setminus E} (x_2/r_2)^p d\mu < 2^{-3} \text{ и } \int_E (x_1/r_m)^q d\mu > 2$$

и положим для $k, n \in \mathbf{N}$

$$E_{kn} = \{t \in E : r_1(t)/r_k(t) \leqslant n,\ x_k(t)/r_m(t) \leqslant n\}.$$

Выберем такой номер n_1, чтобы

$$\int_{T \setminus E_{1n_1}} (x_2/r_2)^p d\mu < 2^{-3} \text{ и } \int_{E_{1n_1}} (x_1/r_m)^q d\mu > 2.$$

Используя абсолютную непрерывность неопределенного интеграла от функции $(x_2/r_2)^p$, найдем такое $\delta > 0$, чтобы $\int_e (x_2/r_2)^p d\mu < 2^{-3}$ как только $\mu(e) < \delta$. Определим для числа $\varepsilon = \min(\delta, n_1^{-q})$ такую последовательность $(n_k)_{k=2}^{\infty}$, чтобы $\mu(E_{1n_1} \setminus E_{kn_k}) < \varepsilon 2^{-k}$, $k = 2, 3, \ldots$, и положим, наконец, $e_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{kn_k}$. Аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы, имеем

$$\int_{e_1} (x_1/r_m)^q d\mu > 1$$

и

$$\int_{T \setminus e_1} (x_2/r_2)^p d\mu = \int_{T \setminus E_{1n_1}} (x_2/r_2)^p d\mu + \int_{E_{1n_1} \setminus e_1} (x_2/r_2)^p d\mu < 2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2},$$

ибо $\mu(E_{1n_1} \setminus e_1) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \mu(E_{1n_1} \setminus E_{kn_k}) < \delta \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} < \delta$.

Таким образом, мы определили множество e_1 конечной меры, на котором функции r_1/r_k и x_k/r_m ограничены и

$$\int_{T \setminus e_1} (x_2/r_2)^p d\mu < 2^{-2}, \text{ а } \int_{e_1} (x_1/r_m)^q d\mu > 1.$$

Применяя аналогичное построение к множеству $T \setminus e_1$, мы придем к множеству $e_2 \subseteq T \setminus e_1$, на котором r_2/r_k и x_k/r_m ограничены и

$$\int_{(T \setminus e_1) \setminus e_2} (x_3/r_3)^p d\mu < 2^{-3}, \text{ а } \int_{e_2} (x_2/r_m)^q d\mu > 1 \text{ и т. д.}$$

Положим $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_{e_k}$ и покажем, что x — искомая функция. Имеем

$$\int_T (x/r_j)^p d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} (x_k/r_j)^p d\mu = \sum_{k=1}^{j} \int_{e_k} (x_k/r_k)^p (r_k/r_j)^p d\mu +$$

$$+ \sum_{k>j} \int_{e_k} (x_k/r_k)^p (r_k/r_j)^p d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{j} c_{kj} \int_{e_k} (x_k/r_k)^p d\mu + \sum_{k>j} \int_{e_k} (x_k/r_k)^p d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{j} c_{kj} \int_{e_k} (x_k/r_k)^p d\mu + \sum_{k>j} 2^{-k},$$

где c_{kj} — подходящие константы. Таким образом, $x \in \mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu)$. Но

$$\int_T (x/r_m)^q d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} (x_k/r_m)^q d\mu \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

т. е. $x \notin \mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$.

Случай $q = \infty$ доказывается сходными рассуждениями.

Теорема 2 сводит вопрос о включении $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$ к описанию мультипликаторов из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$ и проясняет тем самым теорему 1, так как в случае $0 < p < q \leqslant \infty$ описание мультипликаторов из $L_q(\mu)$ в $L_p(\mu)$ дается формулой (1). Описание мультипликаторов из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$ при $0 < p < q \leqslant \infty$ нам в общем случае неизвестно, однако часто мультипликаторами могут быть только функции, эквивалентные нулю. Так будет, например, в случае меры Лебега на произвольном измеримом по Лебегу множестве $T \subseteq \mathbb{R}^n$, или в более общем случае так называемой антидискретной меры, которая характеризуется таким свойством: каждое измеримое множество E с $0 < \mu(E) < \infty$ представляется в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $\mu(E_n) > 0$ и $E_n \cap E_m = \varnothing$ $(n \neq m)$. Это вытекает из теоремы 3. Однако сначала приведем следующее определение.

Определение. *Мера μ называется квазидискретной, если никакое из множеств E с $0 < \mu(E) < \infty$ не допускает представление в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ с $\mu(E_n) > 0$ и $E_n \cap E_m = \varnothing$ $(n \neq m)$.*

Теорема 3. *Если пространство мультипликаторов из $L_p(\mu)$ в $L_q(\mu)$ при $0 < p < q \leqslant \infty$ содержит хотя бы один положительный элемент, то T представимо в виде $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$, так что сужение $\mu | T_n$ — квазидискретная мера.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in (L_p(\mu))^*_{L_q(\mu)}$ и $\alpha(t) > 0$ для каждого $t \in T$. Положим $T_n = \{t \in T : n^{-1} \leqslant \alpha(t) \leqslant n\}$. Тогда $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ и, как легко заметить, $L_p(T_n, \mu) \subseteq L_q(T_n, \mu)$, а значит, как это следует из работы [1], сужение $\mu | T_n$ — квазидискретная мера.

В случае квазидискретной меры включение $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu) \subseteq \mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$ выполняется всегда при $0 < p < q \leqslant \infty$, поэтому либо пространства $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu)$ совпадают для всех $0 < p \leqslant \infty$, либо все они различны.

В самом деле, поскольку $(s \cdot s/2)/(s - s/2) = s$, то в силу теоремы 1 равенство $\mathcal{L}_s(\mathbf{r}, \mu) = \mathcal{L}_\infty(\mathbf{r}, \mu)$ равносильно равенству $\mathcal{L}_{s/2}(\mathbf{r}, \mu) = \mathcal{L}_s(\mathbf{r}, \mu)$. Если $\mathcal{L}_p(\mathbf{r}, \mu) = \mathcal{L}_q(\mathbf{r}, \mu)$ при некоторых $0 < p < q \leqslant \infty$, то $\mathcal{L}_s(\mathbf{r}, \mu) = \mathcal{L}_\infty(\mathbf{r}, \mu)$ с $s = q^*(p)$, откуда получается цепочка равенств

$$\mathcal{L}_\infty(\mathbf{r}, \mu) = \mathcal{L}_s(\mathbf{r}, \mu) = \mathcal{L}_{s/2}(\mathbf{r}, \mu) = \ldots = \mathcal{L}_{s/2^n}(\mathbf{r}, \mu) = \ldots,$$

из которой следует, что все пространства $L_p(\mathbf{r}, \mu)$ совпадают.

3. Покажем теперь, как получаются условия включения $\overline{\mathscr{L}}_p(\mathrm{r}, \mu) \subseteq \overline{\mathscr{L}}_q(\mathrm{r}, \mu)$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < p, q \leqslant \infty$. *Включение* $\overline{\mathscr{L}}_p(\mathrm{r}, \mu) \subseteq \overline{\mathscr{L}}_q(\mathrm{r}, \mu)$ *выполняется тогда и только тогда, когда для каждого* m *существует* k *такое, что* $r_m L_p(\mu) \subseteq r_k L_q(\mu)$.

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Пусть $\overline{\mathscr{L}}_p(\mathrm{r}, \mu) \subseteq \overline{\mathscr{L}}_q(\mathrm{r}, \mu)$. Рассмотрим число $0 < s < \min(p, q)$ и положим $p^* = p^*(s)$, $q^* = q^*(s)$. Согласно свойству 1) операции взятия дуального и формуле (2)

$$\mathscr{L}_{p^*}(1/\mathrm{r}, \mu) = (\overline{\mathscr{L}}_p(\mathrm{r}, \mu))^*_{L_s(\mu)} \supseteq (\overline{\mathscr{L}}_q(\mathrm{r}, \mu))^*_{L_s(\mu)} = \mathscr{L}_{q^*}(1/\mathrm{r}, \mu).$$

Теперь, используя теорему 2, получаем, что для каждого m существует такое k, что $(1/r_k) L_{q^*}(\mu) \subseteq (1/r_m) L_{p^*}(\mu)$. Переходя еще раз к дуальным относительно $L_s(\mu)$, приходим к включению $r_k L_{q^{**}}(\mu) \supseteq r_m L_{p^{**}}(\mu)$. Но $p^{**} = p$ и $q^{**} = q$. Таким образом, теорема доказана.

1. *Subramanion B.* On the inclusion $L_p(\mu) \subset L_q(\mu)$.—Amer. Math. Mont., 1978, 85, № 6 p. 479—481.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
13.06.1980 г.