УДК 517

*Нгуен Донг Ань*

# К вопросу о решении уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для неавтономных систем, подверженных периодическим и случайным воздействиям

При изучении влияния случайного воздействия на механические системы эффективным является метод уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова (ФПК), особенно при его сочетании с асимптотическим методом нелинейной механики [1]. Однако для неавтономного случая, как отмечено в [1], соответствующее уравнение ФПК сложно. Данная работа посвящена решению уравнения ФПК для одного важного класса неавтономных систем. На основании работы [2] решение ищется в виде ряда для амплитуды. Получена система разделяющихся дифференциальных уравнений, позволяющая постепенно определить коэффициенты ряда любого порядка.

1. Рассмотрим неавтономную механическую систему с одной степенью, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \varepsilon P \cos \nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t) \tag{1}$$

в главной резонансной области

$$\omega^2 = \nu^2 + \varepsilon\Delta, \tag{2}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум», имеющий единичную интенсивность,

$$f(x, \dot{x}) = \sum_{s=1}^{m} \alpha_s \left( \sum_{i,j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij} x^i \dot{x}^j \right), \alpha_s, \gamma_{ij} = \text{const} \tag{3}$$

— многочлен относительно $x$, $\dot{x}$.

Используя (2), перепишем (1) в виде

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f_1(x, \dot{x}, \nu t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{4}$$

где

$$f_1(x, \dot{x}, \nu t) = f(x, \dot{x}) - \Delta x + P \cos \nu t. \tag{5}$$

Путем замены [1]

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -a\nu \sin \psi, \quad \psi = \nu t + \theta \tag{6}$$

при помощи формулы Ито уравнение (4) преобразуем к стандартному виду

$$da = \left[-\frac{\varepsilon}{\nu} f_1(x, \dot{x}, \nu t) \sin \psi + \frac{\varepsilon\sigma}{2\nu^2 a} \cos^2 \psi\right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\nu} \sin \psi d\xi(t), \tag{7}$$

$$d\theta = \left[-\frac{\varepsilon}{a\nu} f_1(x, \dot{x}, \nu t) \cos \psi - \frac{\varepsilon\sigma^2}{a^2\nu^2} \sin \psi \cos \psi\right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\nu} \cos \psi d\xi(t).$$

Уравнение ФПК, соответствующее стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ системы (7), усредненной согласно [1], имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial \theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11} W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}(K_{12} W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(K_{22} W), \tag{8}$$

где

$$K_1(a, \theta) = \underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{\nu} f_1(x, \dot{x}, \nu t) \sin \psi + \frac{\sigma^2}{2a\nu} \cos^2 \nu\right\} = \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a} - \frac{P}{2\nu} \sin \theta -$$

$$-\frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{m} \alpha_s \beta_s a^s, \qquad \beta_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij}(-\nu)^j \underset{t}{M}\{\cos^i \psi \sin^{j+1} \psi\}, \tag{9}$$

$$K_2(a, \theta) = \underset{t}{M}\left\{-\frac{1}{a\nu} f_1(x, \dot{x}, \nu t) \cos \psi - \frac{\sigma^2}{\nu^2 a^2} \sin \psi \cos \psi\right\} =$$

$$= \frac{\Delta}{2\nu} - \frac{1}{2a\nu} P \cos \theta - \frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{m} \alpha_s \eta_s a^{s-1}, \ \eta_s = \sum_{i,j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij}(-\nu)^j \underset{t}{M}\{\cos^{i+1} \psi \sin^j \psi\},$$

$$K_{12}(a, \theta) = \underset{t}{M}\left\{\left(-\frac{\sigma}{\nu} \sin \psi\right)\left(-\frac{\sigma}{a\nu} \cos \psi\right)\right\} = 0,$$

$$K_{11}(a, \theta) = \underset{t}{M}\left\{\frac{\sigma^2}{\nu^2} \sin^2 \psi\right\} = \frac{\sigma^2}{2\nu^2}, \qquad K_{22}(a, \theta) = \underset{t}{M}\left\{\frac{\sigma^2}{a^2\nu^2} \cos^2 \psi\right\} = \frac{\sigma^2}{2a^2\nu^2}.$$

Выполняя замену

$$W(a, \theta) = \exp\{\Phi(a, \theta)\}, \tag{10}$$

преобразуем уравнение (18) к виду

$$\frac{\partial K_1}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} K_1 + \frac{\partial K_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} K_2 = \frac{K_{11}}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}\right] +$$

$$+ \frac{K_{22}}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right]. \tag{11}$$

Вопрос заключается в решении нелинейного уравнения с частными производными (11), в котором $K_1$, $K_2$, $K_{11}$, $K_{12}$, $K_{22}$ определяются согласно формулам (9).

2. В уравнении (11) амплитуда $a$ играет роль обобщенной циклической координаты [2] (коэффициенты уравнения — многочлены с целыми степенями амплитуды). Следовательно, согласно [2] уравнения (11) ищем также в виде многочлена с целыми степенями амплитуды

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{1}{a} + \sum_{i=1}^{\infty} i \mu_i(\theta) a^{i-1}, \tag{12}$$

или

$$\Phi(a, \theta) = \ln a + \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(\theta)\, a^i, \tag{13}$$

где $\mu_i(\theta)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие от $\theta$. Подставляя (13) в (11) с учетом (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $a^{-2}$, $a^{-1}$, $a^0$, $a^1$, $a^2$, $a^n$, $n \geqslant 3$, получаем систему уравнений относительно $\mu_i(\theta)$, которая для интересующих нас периодических решений имеет вид

$$\mu_0 = \ln C = \mathrm{const}, \quad C > 0, \quad \mu_1'' + \mu_1 = 0, \quad \mu_2'' + 4\mu_2 = -\frac{8\nu}{\sigma^2}\alpha_1\beta_1 - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(\sin\theta\,\mu_1 + \mu_1'\cos\theta) - (\mu_1'^2 + \mu_1^2), \quad \mu_3'' + 9\mu_3 = \frac{12\nu}{\sigma^2}\alpha_2\beta_2 + \frac{4\nu}{\sigma^2}\left[\left(\frac{\Delta}{2} - \alpha_1\eta_1\right)\mu_1' - \frac{\alpha_1\beta_1}{\nu}\mu_1\right] - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(2\mu_2\sin\theta + \mu_2'\cos\theta) - 2(2\mu_1\mu_2 + \mu_1'\mu_2'), \quad \mu_4'' + 16\mu_4 = -\frac{16\nu}{\sigma^2}\alpha_3\beta_3 - \frac{4\nu}{\sigma^2}\alpha_2\beta_2(\mu_1 + \mu_1') - \frac{4\nu}{\sigma^2}\left\{\left(\frac{\Delta}{2} - \alpha_1\eta_1\right)\mu_2' - 2\alpha_1\beta_1\mu_2\right\} - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(3\mu_3\sin\theta + \mu_3'\cos\theta) - 2(3\mu_1\mu_3 + \mu_1'\mu_3') - (4\mu_2^2 + \mu_2'^2), \quad \mu_{n+2}'' + (n+2)^2\mu_{n+2} = -\frac{4\nu}{\sigma^2}(n+2)\alpha_{n+1}\beta_{n+1} - \frac{4\nu}{\sigma^2}\sum_{i,s=1}^{i+s=n+1} i\mu_i\alpha_s\beta_s - \frac{2\nu P}{\sigma^2}\{(n+1)\mu_{n+1}\sin\theta + \mu_{n+1}'\cos\theta\} + \frac{2\nu\Delta}{\sigma^2}\mu_n' - \frac{4\nu}{\sigma^2}\sum_{i,s=1}^{i+s=n+1}\mu_i'\alpha_s\eta_s - \sum_{i,j=1}^{i+j=n+2}(ij\mu_i\mu_j + \mu_i'\mu_j'), \quad n \geqslant 3. \tag{14}$$

Для уравнения Дуффинга, когда

$$f(x, \dot{x}) = -\beta x + \gamma x^3, \tag{15}$$

система имеет вид

$$\mu_0'' + \mu_0'^2 = 0, \quad \mu_1'' + 2\mu_0'\mu_1 + \mu_1 = -\frac{2\nu P\cos\theta}{\sigma^2}\mu_0', \quad \mu_2'' + 2\mu_0'\mu_2' + 4\mu_2 = -(\mu_1^2 + \mu_1'^2) - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(\mu_1\sin\theta + \mu_1'\cos\theta) - \frac{4\nu^2}{\sigma^2}\beta + \frac{2\nu\Delta}{\sigma^2}\mu_0',$$

$$\mu_3'' + 2\mu_0'\mu_3 + 9\mu_3 = -2(2\mu_1\mu_2 + \mu_1'\mu_2') + \frac{2\nu^2}{\sigma^2}\left(\frac{\Delta}{\nu}\mu_1' - \beta\mu_1\right) - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(2\mu_2\sin\theta + \mu_2'\cos\theta), \quad \mu_4'' + \mu_0'\mu_4' + 16\mu_4 = -[(4\mu_2^2 + \mu_2'^2) + 2(3\mu_1\mu_3 + \mu_1'\mu_3')] + \frac{4\nu^2}{\sigma^2}\left(\frac{\Delta}{2\nu}\mu_2' - \beta\mu_2\right) + \frac{3\gamma\nu^2}{2\sigma^2}\mu_0' - \frac{2\nu P}{\sigma^2}(3\mu_3\sin\theta + \mu_3'\cos\theta), \quad \mu_{n+2}'' + 2\mu_0'\mu_{n+2}' + (n+2)^2\mu_{n+2} = -\sum_{i=1}^{n+1}[i(n+2-i)\mu_i\mu_{n+2-i} + \mu_i'\mu_{n+2-i}'] + \frac{2\nu^2}{\sigma^2}\left(\frac{\Delta}{\nu}\mu_n' - \beta n\mu_n\right) + \frac{3\nu\gamma}{2\sigma^2}\mu_{n-2}' - \frac{2\nu P}{\sigma^2}[(n+1)\mu_{n+1}\sin\theta + \mu_{n+1}'\cos\theta], \quad n \geqslant 3. \tag{16}$$

В случае отсутствия периодического воздействия ($P = 0$, $\Delta = 0$) методом математической индукции легко доказать, что система (16) допускает частное периодическое решение

$$\mu_0 = \ln C, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\nu^2\beta\sigma^{-2}a^2, \quad \mu_n = 0, \quad n \geqslant 3. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (13) и с учетом (10) получаем известную плотность вероятностей $W(a, \theta)$ для уравнения Дуффинга

$$W(a, \theta) = Ca \exp\{-\nu^2\beta\sigma^{-2}a^2\}.$$

После нахождения коэффициентов $\mu_i(\theta)$ из системы (14) решение уравнения ФПК (8) с учетом формул (13), (10) получаем в виде

$$W(a, \theta) = Ca \exp\{\mu_1(\theta) a + \mu_2(\theta) a^2 + \ldots + \mu_n(\theta) a^n + \ldots\}.$$

Заметим, что во многих случаях система дифференциальных уравнений (14) допускает решение вида $\mu_i(\theta) = \varphi_i(\theta)$, $\mu_j(\theta) = 0$, $i = \overline{1, N}$, $j \geqslant N + 1$. К указанным случаям принадлежит система Ван дер Поля и многие другие автоколебательные системы при точном резонансе ($\Delta = 0$).

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 102—145.
2. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу исследования уравнений ФПК методом разложения в ряд Маклорена по циклической координате.— Механика, Ханой, 1979, № 1/2. Вьетнам.

Вьетнам

Поступила в редакцию 14.07.1981 г.