УДК 517.9

Ф. У. Носиров

Об оценке m-го асимтотического приближения для дифференциального уравнения с запаздыванием

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \varepsilon f\left(\tau, \theta, x(t), x(t - \Delta(\tau)), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t - \Delta(\tau))}{dt}\right), \quad (1)$$

где $\tau = \varepsilon t$ — медленное время; ε — малый положительный параметр; f — 2π-периодическая по θ функция, которая может быть представлена в виде

$$f(\tau, \theta, x(t), x(t - \Delta(\tau)), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \Delta(\tau))) =$$
$$= \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} f_n(\tau, x(t), x(t - \Delta(\tau)), \dot{x}(t), \dot{x}(t - \Delta(\tau))). \quad (2)$$

При этом коэффициенты конечной суммы — некоторые полиномы $x(t)$, $x(t - \Delta\tau))$, $\dot{x}(t)$, $x(t - \Delta(\tau))$, а коэффициенты этих полиномов зависят от τ.

Предположим, что $d\theta/dt = \nu(\tau)$, т. е. мгновенная частота медленно меняется со временем, а f_n имеют достаточное число производных по τ для всех конечных значений $\tau \in [0, L]$.

При таких предположениях в работе [1] применен асимптотический метод к построению приближенного решения уравнения (1), в котором m-е улучшенное приближение имеет вид

$$x^{(m-1)} = a\cos(pq^{-1}\theta + \psi) + \varepsilon u_1(\tau, a, \theta, pq^{-1}\theta + \psi) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^{m-1} u_{m-1}(\tau, a, \theta, pq^{-1}\theta + \psi), \quad (3)$$

где a и ψ определены из системы

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \psi) + \ldots + \varepsilon^m A_m(\tau, a, \psi),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \ldots + \varepsilon^m B_m(\tau, a, \psi). \qquad (4)$$

В разложении (3) получено приближенное решение, которое удовлетворяет исходному уравнению с точностью до величин порядка малости ε^{m+1}. Это приближенное решение для достаточно большого отрезка времени с необходимой точностью представляет решение уравнения (1).

Для обоснования изложенного асимптотического метода необходимо доказать теорему, устанавливаемую при некоторых весьма общих условиях, что для уравнений (1) разность между ее точным и приближенным решениями будет величиной порядка малости ε^m.

Теорема. *Пусть для уравнения* (1) *выполняются следующие условия:*

а) $\omega(\tau)$, $\Delta(\tau)$ $\nu(\tau)$, *а также* $f(\tau, \theta, x(t), x(t-\Delta(\tau)), \dot{x}(t-\Delta(\tau)))$ *имеют достаточное число производных по* τ *для всех конечных значений* $\tau \in [0, L]$;

б) *выражение* $\left(\frac{\partial^m f}{\partial \varepsilon^m}\right)_{\varepsilon=0}$ — *конечный тригонометрический полином угла* θ;

в) *на всем отрезке* $0 \leqslant \tau \leqslant L/\varepsilon$ *имеет место неравенство*

$$A_1(\tau, a, \psi) \leqslant Ca + C_1; \qquad (5)$$

$$\text{г) } |\dot{x}(t)| \leqslant C^*, \quad |\dot{x}^m(t)| \leqslant C_1^* \qquad (6)$$

для всех $t \in [0, L/\varepsilon]$

Тогда любому сколь угодно большому L *и постоянным* M, S *можно сопоставить такие положительные* ε_0, K_m, *что для всех* ε $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$ *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon$ *будут справедливы неравенства*

$$|x^{(m-1)} - x| < K_m \varepsilon^m, \quad |\dot{x}^{(m-1)} - \dot{x}| < K_m \varepsilon^m \qquad (7)$$

при выполнении начальных условий

$$|x^{(m)}(0) - x(0)| \leqslant S\varepsilon^m, \quad |x^{(m)}(0)| \leqslant M,$$
$$|\dot{x}^{(m)}(0) - \dot{x}(0)| \leqslant S\varepsilon^m, \quad |\dot{x}^{(m)}(0)| \leqslant M. \qquad (8)$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, сформулируем две леммы.

Лемма 1. *Если выполнены условия теоремы, то* m*-е улучшенное приближение решения уравнения* (1) (*а также их первые производные*) *равномерно ограничены на интервале* $0 \leqslant \tau \leqslant L$.

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы, то для всякого положительного числа* M *всегда можно указать такие положительные числа* ε_0 *и* $R_m^{(M)}$, *для которых* m*-е улучшенное приближение на интервале* $0 \leqslant \tau \leqslant L$ *удовлетворяет неравенству*

$$|d^2 x^{(m)}/dt^2 + \omega^2(\tau) x^{(m)} -$$
$$- \varepsilon f(\tau, \theta, x^{(m)}(t), x^{(m)}(t-\Delta(\tau)), \dot{x}^{(m)}(t), \dot{x}^{(m)}(t-\Delta(\tau)))| \leqslant R_m^{(M)} \varepsilon^{m+1}. \qquad (9)$$

Мы не приводим доказательство леммы, так как аналогичные леммы доказаны в работе [2] для уравнения

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \omega_k^2(\tau) x_k = \frac{\varepsilon}{m_k(\tau)} X_k(\tau, \theta, x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N, \varepsilon).$$

Влияние запаздывания существенно не изменяет способ из доказательства.

Доказательство теоремы. Подставляя значения m-го улучшенного приближения в уравнение (1), и вычитая полученное выражение из уравнения (1), находим

$$d^2(x^{(m)}-x)/dt^2+\omega^2(x^{(m)}-x)=\varepsilon F(t), \tag{10}$$

где $F(t)=f(\tau,\Theta,x^{(m)},x^{(m)}(t-\Delta(\tau)),\dot{x}^{(m)},\dot{x}^{(m)}(t-\Delta(\tau)))-f(\tau,\Theta,x,x(t-\Delta(\tau)),\dot{x},\dot{x}(t-\Delta(\tau)))+\varepsilon^m R_m^{(M)}$. Принимая во внимание условие (8) и лемму 1, имеем

$$|x(t)|\leqslant M+1,\quad |\dot{x}(t)|\leqslant M+1 \tag{11}$$

на всем интервале $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$, где $\tau_0\leqslant L$. Принимая во внимание (6) условие теоремы, получаем

$$|x(t)-x(t-\Delta(\tau))|\leqslant\Delta(\tau)C^*,\qquad |x^{(m)}(t)-x^{(m)}(t-\Delta(\tau)|\leqslant\Delta(\tau)C_1^*. \tag{12}$$

Вначале докажем справедливость теоремы на интервале $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$. Выполняя в уравнении (10) замену переменных

$$x^{(m)}-x=u\cos\varphi+v\sin\varphi,\qquad \dot{x}^{(m)}-\dot{x}=-u\omega\sin\varphi+v\omega\cos\varphi, \tag{13}$$

где $\varphi=\int\limits_0^t\omega(\tau)\,dt$, и интегрируя полученное выражение, находим

$$u=u(0)-\int\limits_0^t\left\{\frac{F(t)\sin\varphi}{\omega}+\frac{\varepsilon}{\omega}(u\omega\sin\varphi-v\omega\cos\varphi)\sin\varphi\right\}dt, \tag{14}$$

$$v=v(0)+\int\limits_0^t\left\{\frac{F(t)\cos\varphi}{\omega}+\frac{\varepsilon}{\omega}(u\omega\sin\varphi-v\omega\cos\varphi)\cos\varphi\right\}dt.$$

Согласно замене переменных (13) при наличии запаздывания имеем

$$x^{(m)}(t-\Delta(\tau))-x(t-\Delta(\tau))=u(t-\Delta(\tau))\cos\varphi+v(t-\Delta(\tau))\sin\varphi. \tag{15}$$

Вычитая выражение (15) из первого уравнения (13), находим

$$v(t)-v(t-\Delta(\tau))=[x^{(m)}(t)-x^{(m)}(t-\Delta(\tau))]\sin\varphi-[x(t)-x(t-\Delta(\tau))]\sin\varphi, \tag{16}$$

$$u(t)-u(t-\Delta(\tau))=[x^{(m)}(t)-x^{(m)}(t-\Delta(\tau))]\cos\varphi-$$
$$-[x(t)-x(t-\Delta(\tau))]\cos\varphi.$$

Отсюда, принимая во внимание условия (12), получаем

$$|v(t)-v(t-\Delta(\tau))|\leqslant\Delta(\tau)\overline{C},\quad |u(t)-u(t-\Delta(\tau))|\leqslant\Delta(\tau)\overline{C}, \tag{17}$$

где $\overline{C}=C_1^*-C^*$

$$|u(0)|\leqslant S\varepsilon^m,\quad |v(0)|\leqslant S\varepsilon^m\omega^*. \tag{18}$$

Согласно условию теоремы, для функции $f(\tau,\theta,x(t),x(t-\Delta(\tau)),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\Delta(\tau)))$ выполняется условие Липшица

$$|f(\tau,\theta,x(t),x(t-\Delta(\tau)),\dot{x}(t),\dot{x}(t-\Delta(\tau)))-f(\tau,\theta,x^*(t),x^*(t-\Delta(\tau)),$$
$$\dot{x}^*(t),\dot{x}^*(t-\Delta(\tau))|\leqslant\lambda\{|x-x^*|+|x(t-\Delta(\tau))-x^*(t-\Delta(\tau))|+$$
$$+|\dot{x}(t)-\dot{x}^*(t)|+|\dot{x}(t-\Delta(\tau))-\dot{x}^*(t-\Delta(\tau))|\}, \tag{19}$$

где λ — положительная постоянная, а $\omega(\tau)$ — ограничена на интервале $0\leqslant\tau\leqslant L$, т. е.

$$\omega^*\leqslant\omega\leqslant\omega^0, \tag{20}$$

где ω^*, ω — положительные постоянные

Принимая во внимание (18), (20), из (14) получаем

$$|u| \leqslant \frac{1}{\omega^*} \int_0^t |F(t)|\, dt + \frac{\varepsilon\omega^0}{\omega^*} \int_0^t [\,|u| + |v|]\, dt + \varepsilon^m S,$$

$$|v| \leqslant \frac{1}{\omega^*} \int_0^t |F(t)|\, dt + \frac{\varepsilon\omega^0}{\omega^*} \int_0^t [\,|u + |v|]\, dt + \frac{\varepsilon^m S}{\omega^*}, \tag{21}$$

где ω^0 — наибольшее значение ω на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Учитывая (13), (19), (17), находим

$$|F(t)| \leqslant \lambda \{[\,|u| + |v|] + \omega^* [\,|u| + |v|] + [\,|u| + |v| + 2\Delta(\tau)\bar{C}] + \\ + [\,|u| + |v| + 2\Delta(\tau)\bar{C}]\,\omega_*\} + \varepsilon^m R_m^{(M)} = 2\lambda(1 + \omega_*)[\,|u| + |v|] + \\ + 2\lambda\Delta(\tau)\bar{C}(1 + \omega_*) + \varepsilon^m R_m^{(M)}. \tag{22}$$

На основании (22) неравенства (21) примут вид

$$|u| \leqslant \frac{\varepsilon g_1}{2} \int_0^t [\,|u| + |v|]\, dt + \frac{\varepsilon t g_2}{2} + \varepsilon^m S_*,$$

$$|v| \leqslant \frac{\varepsilon g_1}{2} \int_0^t [\,|u| + |v|]\, dt + \frac{\varepsilon t g_2}{2} + \varepsilon^m S_*, \tag{23}$$

где $g_1 = 2[\omega^0 + 2\lambda(1 + \omega_*)]/\omega^*$, $g_2 = 2[2\Delta(\tau)\lambda\bar{C} + \varepsilon^m R_m^{(M)}]/\omega^*$; S^* — большее из чисел S, S/ω^*; ω^* — большее из чисел ω^0. Склыдавая неравенства (3), получаем

$$Z \leqslant \varepsilon g_1 \int_0^t z(t)\, dt + \varepsilon g_2 t + 2\varepsilon^m S_*, \tag{24}$$

где $z = |u| + |v|$.

Рассмотрим уравнение

$$\xi = \varepsilon g_1 \int_0^t \xi(t)\, dt + \varepsilon g_2 t + 2\varepsilon^m S_*. \tag{25}$$

Вычитая (25) из (24) и умножая результат на $e^{\varepsilon g_1 t}$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-\varepsilon g_1 t} \int_0^t [z(t) - \xi(t)]\, dt\right\} \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$z(t) \leqslant \xi(t). \tag{26}$$

Решая уравнение (25), находим

$$\xi(t) = g_2 g_1^{-1}(e^{\varepsilon g_1 t} - 1) + 2\varepsilon^m S_* e^{\varepsilon g_1 t}. \tag{27}$$

Подставляя в правую часть (27) вместо τ_0 и принимая во внимание (26), получаем

$$z(t) \leqslant g_2 g_1^{-1}(e^{g_1 \tau_0} - 1) + 2\varepsilon^m S_* e^{g_1 \tau_0},$$

из которого следует, что

$$|x^{(m)} - x| \leqslant S_m \varepsilon^m, \quad |\dot{x}^{(m)} - \dot{x}| \leqslant S_m \varepsilon^m,$$

где S_m — некоторая постоянная.

Таким образом, мы получили оценку для m-го улучшенного приближения, которое отличается от m-го приближения на величину порядка малости ε^m:

$$|x^{(m)} - x^{(m-1)}| \leqslant \varepsilon^m \tau_m, \quad |\dot{x}^{(m)} - \dot{x}^{(m-1)}| \leqslant \varepsilon^m \tau_m,$$

где τ_m — постоянная.

Выбирая такое K_m, чтобы $\tau_m < K_m/2$, $S_m < K_m/2$, получаем

$$\begin{aligned} &|x^{(m-1)} - x| \leqslant \varepsilon^m S_m + \varepsilon^m \tau_m < \varepsilon^m K_m, \\ &|\dot{x}^{(m-1)} - \dot{x}| \leqslant \varepsilon S_m + \varepsilon^m \tau_m < \varepsilon^m K_m. \end{aligned} \tag{28}$$

Итак, справедливость теоремы на интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ доказана.

Рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве теоремы асимптотического приближения в работе [2], можно показать, что число τ может быть взято равным L, после чего неравенства (28) будут выполняться на всем интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$. Теорема доказана.

1. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев: Вища школа, 1979.— 248 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний— М.: Наука, 1964.— 432 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
26.09.1980 г.