УДК 917.946

С. Д. Ивасишен

О параболических граничных задачах без начальных условий

В настоящей работе с помощью результатов проведенного автором изучения матриц Грина (см. [1]) методом А. Н. Тихонова [2] получается интегральное представление решений граничных задач без начальных условий для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида и доказывается теорема о корректной разрешимости таких задач в пространствах Гельдера. Кроме того, приводятся теоремы типа Лиувилля для решений рассматриваемых задач. Аналогичные вопросы изучались в работах [3—7]. Будем использовать обозначения из [1, 8].

Корректная разрешимость задачи без начальных условий. Пусть Q_0^- — область в полупространстве $\{(t, x) \mid t < T, x \in R^n\}$, ограниченная гиперплоскостью $t = T$ и боковой границей Q_1^-. Будем считать ее бесконечной по x и рассмотрение проводить в пространствах растущих функций, тип роста при $|x| \to \infty$ которых характеризует функция $k(t, a)$ [8]. Результаты в пространствах ограниченных по x функций и в случае конечной по x области Q_0^- получаются из приведенных ниже, если в них положить $a = 0$. Будем использовать обозначения $Q_\nu^{t_0,T} = Q_\nu \cap \{t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, $\Omega_\nu^\tau = Q_\nu \cap \{t = \tau\}$, $\nu = 0, 1$.

В области Q_0^- рассмотрим задачу

$$A(P, D_t, D_x)\, u = f_0(P), \quad B(P, D_t, D_x)\, u\,|_{Q_1^-} = f_1(P) \tag{1}$$

и предположим выполненными условия теоремы 4.4 из [1] для операторов A, B и границы Q_1^-.

Пусть $u(P) = (u_1(P), \ldots, u_N(P))$ — решение задачи (1) такое, что при любом $t_0 \in (-\infty, T)$

$$u_i \in H_{k(t,a)}^{2bn_i + l_0 + \alpha}(Q_0^{t_0,T}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Так как $u(P)$ в области $Q_0^{t_0,T}$ — решение задачи

$$\begin{gathered} A(P, D_t, D_x)\, u = f_0(P), \quad B(P, D_t, D_x)\, u\,|_{Q_1^{t_0,T}} = f_1(P), \\ D_t^\mu u_i\,|_{t=t_0} = D_{t_0}^\mu u_i(t_0, x), \quad \mu = 0, \ldots, n_i - 1, \quad i = 1, \ldots, N, \end{gathered} \tag{3}$$

то в силу замечания из п. 2 работы [8] для $u_i(P)$, $i = 1, \ldots, N$, справедлива формула (2) из этой работы, в которой $\tau = 0$ заменено на $\tau = t_0$, а $\varphi_i^\mu(\xi)$ — на $D_{t_0}^\mu u_i(t_0, \xi)$. Функции

$$G_{\nu ij}^1(P, Q),\ R_{ij}^k(P, Q),\ W_{ij}^{\bar{k}}(P, Q), G_{2ij}^{1\mu}(P, Q),\ R_{ij}^{\mu k}(P, Q)\, V_{ij}^{\mu k}(P, Q), Q_{ij}^{\mu k}(P, Q) \tag{4}$$

принадлежат указанным в теореме 4.4 из [1] классам, откуда, в частности, для $G_{\nu ij}^1$ следуют оценки

$$|D_P^{\bar{k}} G_{\nu ij}^1(P, Q)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{M(|\bar{k}|)}{2b}} \exp\{\gamma(t-\tau)\}\, E_c(|x-\xi|, t-\tau), \quad |\bar{k}| \leqslant r_i,$$

$$\begin{gathered} |\Delta_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} D_P^{\bar{k}} G_{\nu ij}^1(P, Q)| \leqslant C\,|x^{(1)} - x^{(2)}|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{M(r_i+\alpha)}{2b}} \exp\{\gamma(t-\tau)\} \times \\ \times E_c(|x^* - \xi|, t-\tau), \quad |\bar{k}| = r_i, \end{gathered}$$

$$| \Delta_t^{t_0} D_P^{\bar{k}} G_{\nu ij}^1 (P, Q) | \leqslant C (t - t_0)^{\frac{r_i - |\bar{k}| + \alpha}{2b}} (t_0 - \tau)^{-\frac{M(r_i + \alpha)}{2b}} \exp\{\gamma (t - \tau)\} \times$$

$$\times E_c(|x - \xi|, t - \tau), \quad 0 \leqslant r_i - |\bar{k}| < 2b, \tag{5}$$

где $P \in Q_0^-$, $Q \in Q_\nu^-$, $t > t_0 > \tau$; $M(|\bar{k}|) = n + 2b(1 - n_i) - \nu(\sigma_j + 1) + |\bar{k}|$; $C, c, \gamma > 0$, и аналогичные оценки для R_{ij}^k, $W_{ij}^{\bar{k}}$, $G_{2ij}^{1\mu}$, $R_{ij}^{\mu k}$, $V_{ij}^{\mu k}$ и $Q_{ij}^{\mu k}$.

Функции (4) назовем функциями Грина операторов A и B. Будем говорить, что функции Грина операторов A и B удовлетворяют условию Γ_γ, если для $G_{\nu ij}^1$ справедливы оценки (5), а для R_{ij}^k, $W_{ij}^{\bar{k}}$, $G_{2ij}^{1\mu}$, $R_{ij}^{\mu k}$, $V_{ij}^{\mu k}$ и $Q_{ij}^{\mu k}$ — аналогичные им оценки с постоянной γ и некоторыми постоянными $C, c > 0$.

Из теоремы 4.4 работы [1] следует, что при выполнении условий этой теоремы функции Грина операторов A и B удовлетворяют условию Γ_γ с $\gamma > 0$. Для функций Грина некоторых операторов A и B может выполняться условие Γ_γ с $\gamma \leqslant 0$. Так, рассмотрим следующую задачу с комплексным параметром λ:

$$A(P, D_t + \lambda, D_x) u = f_0(P),$$

$$B(P, D_t + \lambda, D_x) u|_{Q_1^{t_0, T}} = f_1(P), \quad C_0(D_t + \lambda) u|_{t=t_0} = \varphi(x). \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что функции (4) для задачи (6) получаются из соответствующих функций для задачи (3) умножением на $\exp\{-\lambda(t - \tau)\}$, поэтому если функции Грина операторов $A(P, D_t, D_x)$ и $B(P, D_t, D_x)$ удовлетворяют условию Γ_{γ_0} с $\gamma_0 > 0$, то функции Грина операторов $A(P, D_t + \lambda, D_x)$ и $B(P, D_t + \lambda, D_x)$ — условию Γ_γ с $\gamma = \gamma_0 - \operatorname{Re}\lambda$. Отсюда, в частности, вытекает, что при достаточно большом $\operatorname{Re}\lambda$ функции Грина операторов $A(P, D_t + \lambda, D_x)$ и $B(P, D_t + \lambda, D_x)$ удовлетворяют условию Γ_γ с $\gamma \leqslant 0$.

Рассмотрим в области $Q_0^{t_0, T}$ задачу

$$A(P, D_t, D_x, i\lambda) u = f_0(P), B(P, D_t, D_x, i\lambda) u|_{Q_1^{t_0, T}} = f_1(P),$$

$$C_0(D_t) u|_{t=t_0} = \varphi(x) \tag{7}$$

и в области $Q_0^{t_0, T} \times \{y \in R^1\}$ — вспомогательную задачу

$$A(P, D_t, D_x, D_y) v = f_0(P, y),$$

$$B(P, D_t, D_x, D_y) v|_{Q_1^{t_0, T} \times \{y \in R^1\}} = f_1(P, y), C_0(D_t) v|_{t=t_0} = \varphi(x, y), \tag{8}$$

где λ — действительный параметр, а

$$A_{ij}(P, D_t, D_x, D_y) = \delta_{ij} D_t^{n_j} - \sum_{|\bar{k}| + p \leqslant 2bn_j} a_{kp}^{ij}(P) D_P^{\bar{k}} D_y^p, \quad i, j = 1, \ldots, N;$$

$$B_{ij}(P, D_t, D_x, D_y) = \sum_{|\bar{k}| + p \leqslant 2bn_j + \sigma_i} b_{\bar{k}p}^{ij}(P) D_P^{\bar{k}} D_y^p, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots N.$$

Пусть операторы $A(P, D_t, D_x, D_y)$ и $B(P, D_t, D_x, D_y)$ удовлетворяют в области $Q_0^- \times \{y \in R^1\}$ условиям теоремы 4.4 из [1]. Функции (4) для задачи (7) — преобразования Фурье по y соответствующих функций для задачи (8). Так как последние функции при $|y| \to \infty$ убывают как $\exp\{-c[|y| \times (t - \tau)^{-1/(2b)}]^{2b/(2b-1)}\}$, $t > \tau$, то первые при $|\lambda| \to \infty$ убывают как $\exp\{-\beta\lambda^{2b}(t - \tau)\}$. Поэтому функции Грина операторов $A(P, D_t, D_x, i\lambda)$ и $B(P, D_t, D_x, i\lambda)$ удовлетворяют условию Γ_γ с $\gamma = \gamma_0 - \beta\lambda^{2b}$, где $\gamma_0 > 0$. Взяв $\lambda^{2b} \geqslant \gamma_0/\beta$, получим условие Γ_γ с $\gamma \leqslant 0$.

Пусть функции Грина операторов A и B из задачи (1) удовлетворяют условию Γ_γ с некоторым γ. Как было выше отмечено, для решения задачи (1) справедливо при любых $t_0 < t \leqslant T$ представление (2) из [8], в котором $\tau = 0$ заменено на $\tau = t_0$, а $\varphi_i^\mu(\xi)$ — на $D_{t_0}^\mu u_i(t_0, \xi)$. Перейдем в этом представлении к пределу при $t_0 \to -\infty$. Предполагая выполненными, кроме условия (2), для любых фиксированных $P \in Q_0^-$ еще и условия

$$\int\limits_{\Omega_0^{t_0}} (t-t_0)^{n_i-n_j+\mu-\frac{n}{2b}} E_c^\gamma(|x-\xi|,\ t-t_0)\,|D_{t_0}^\mu u_j(t_0,\xi)|\,d\xi \to 0, \quad t_0 \to -\infty; \tag{9}$$

$$\int\limits_{\Omega_1^{t_0}} (t-t_0)^{n_i-n_j+\mu-\frac{n-|k|-1}{2b}} E_c^\gamma(|x-\xi|, t-t_0)\,|D_{t_0}^\mu D_\xi^k u_j(t_0,\xi)|\,d\xi \to 0,$$

$$t_0 \to -\infty,\ |k| \leqslant M_{j\mu}; \tag{10}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\Omega_\nu^\tau} (t-\tau)^{n_i-1-\frac{n-\nu(\sigma_s+1)}{2b}} E_c^\gamma(|x-\xi|, t-\tau)\,|f_{\nu s}(Q)|\,d\xi < \infty; \tag{11}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\Omega_1^\tau} (t-\tau)^{n_i-1-\frac{n-|k|-1}{2b}} E_c^\gamma(|x-\xi|, t-\tau)\,|D_\xi^k f_{0j}(Q)|\,d\xi < \infty,$$

$$|k| \leqslant \rho_0,\ \text{при}\ \rho_0 \geqslant 0; \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Omega_1^{t_0}} (t-t_0)^{n_i-\frac{n-|\bar{k}|-1}{2b}} E_c^\gamma(|x-\xi|, t-t_0)\,|D_Q^{\bar{k}} f_{0j}(Q)|\,|_{\tau=t_0} d\xi \to 0, \quad t_0 \to -\infty,$$

$$|\bar{k}| \leqslant \sigma_1 - 2b,\ \text{при}\ \pi_0 > 0, \tag{13}$$

где $i, j = 1, \ldots, N$; $\mu = 0, \ldots, n_j - 1$; $s = 1, \ldots, N$ при $\nu = 0$ и $s = 1, \ldots, m$ при $\nu = 1$; $M_{j\mu}$ определено в [8]; $E_c^\gamma(r,t) = e^{\gamma t} E_c(r,t)$, c — наименьшая среди постоянных c из оценок (5) и аналогичных оценок для остальных функций (4), получим для решения задачи (1) формулу

$$u(P) = \sum_{\nu=0}^{1} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\Omega_\nu^\tau} G_\nu^1(P,Q)\, f_\nu(Q)\, d\xi + \sum_{|k|\leqslant\rho_0} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{\Omega_1^\tau} R^k(P,Q)\, D_\xi^k f_0(Q)\, d\xi. \tag{14}$$

Заметим, что условия (9) и (10) выполняются, в частности, если для любого $t_0 \in (-\infty, T]$

$$\sup_{\xi\in\Omega_0^{t_0}} [\,|D_{t_0}^\mu D_\xi^k u_j(t_0,\xi)|\,\chi^{-1}(t_0,\xi)] \leqslant Ce^{\beta t_0},$$

$$|k| \leqslant M_{j\mu}, \quad \mu \leqslant n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{15}$$

где C не зависит от t_0 а $\beta > \gamma$. Это легко доказывается с помощью неравенства

$$E_{c_0}(|x-\xi|, t-\tau)\,\chi(\tau,\xi) \leqslant \chi(t,x). \tag{16}$$

Как следствие установленных результатов получаем теорему о единственности решения задачи (1) в классе функций, удовлетворяющих условиям (2), (9) и (10) (или (2) и (15)). Теперь докажем существование решения задачи (1), принадлежащего этому классу единственности.

Теорема 1. *Пусть для операторов A, B и границы Q_1^- выполняются условия теоремы 4.4 из* [1] *и пусть функции Грина этих операторов удовлетворяют условию Γ_γ с некоторым γ (положительным, отрицательным, равным нулю). Если при любом $t_0 \in (-\infty, T)$ $f_{\nu i} \in H_{k(t,a)}^{s-\nu\sigma_i+\alpha}(Q_\nu^{t_0,T})$, $l_0 \leqslant s \leqslant l - l_0 - l_1$, и для норм $f_{\nu i}$ в пространствах $H_{k(t,a)}^{l_0-\nu\sigma_i+\alpha}(Q_\nu^{t_0-2,t_0})$ справедливы неравенства*

$$\|f_{\nu i}\|_{Q_\nu^{t_0-2,t_0},k(t,a)}^{l_0-\nu\sigma_i+\alpha} \leqslant Ce^{\beta t_0}, \quad \nu = 0, 1, \tag{17}$$

в которых $\beta > \gamma$ и C не зависит от t_0, то вектор-функция (14) *— единственное решение задачи* (1), *удовлетворяющее условиям* (2) *и* (15).

Доказательство. Пусть t_0 — произвольно взятое число из $(-\infty, T)$. Рассмотрим функцию $\zeta_{t_0}(t) \in C^\infty(R^1)$, равную нулю при $t \leqslant t_0 - 2$ и единице при $t \geqslant t_0 - 1$, и представим (14) в виде

$$u(P) = u'(P) + u''(P),$$

$$u'(P) = \sum_{\nu=0}^{1} \int_{t_0-2}^{t} d\tau \int_{\Omega_\nu^\tau} G_\nu^1(P, Q)\, \zeta_{t_0}(\tau)\, f_\nu(Q)\, d\xi + \sum_{|k| \leqslant \rho_0} \int_{t_0-2}^{t} d\tau \int_{\Omega_1^\tau} R^k(P, Q) \times$$

$$\times \zeta_{t_0}(\tau)\, D_\xi^k f_0(Q)\, d\xi,$$

$$u''(P) = \sum_{\nu=0}^{1} \int_{-\infty}^{t_0-1} d\tau \int_{\Omega_\nu^\tau} G_\nu^1(P, Q)\, [1 - \zeta_{t_0}(\tau)]\, f_\nu(Q)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{|k| \leqslant \rho_0} \int_{-\infty}^{t_0-1} d\tau \int_{\Omega_1^\tau} R^k(P, Q)\, [1 - \zeta_{t_0}(\tau)]\, D_\xi^k f_0(Q)\, d\xi.$$

В силу теоремы 2 из [8] вектор-функция u' — решение задачи

$$A(P, D_t, D_x)\, u' = \zeta_{t_0}(\tau)\, f_0(P),$$

$$B(P, D_t, D_x)\, u' \big|_{Q_1^{t_0-2,T}} = \zeta_{t_0}(t)\, f_1(P), \quad C_0(D_t)\, u' \big|_{t=t_0-2} = 0$$

такое что $u_i' \in \overset{0}{H}{}^{2bn_i+s+\alpha}_{k(t,a)}(Q_0^{t_0-2,T})$, $i = 1, \ldots, N$. Из свойств функций $G_{\nu ij}^1$ и R_{ij}^k следует, что при $P \in Q_0^{t_0,T}$ u'' есть решение задачи (1) с $f_\nu \equiv 0$, $\nu = 0, 1$, и $u_i'' \in H^{2bn_i+s+\alpha}_{k(t,a)}(Q_0^{t_0,T})$, $i = 1, \ldots, N$.

Следовательно, функция (14) — решение задачи (1), удовлетворяющее условию (2). Докажем, что она удовлетворяет условию (15). Используя условия теоремы, свойства функции ζ_{t_0} и теорему 1 из [8], получаем

$$\sum_{i=1}^{N} \| u_i' \|^{2bn_i+l_0+\alpha}_{Q_0^{t_0-2,t_0,k(t,a)}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{N} \| f_{0i} \|^{l_0+\alpha}_{Q_0^{t_0-2,t_0,k(t,a)}} + \sum_{i=1}^{m} \| f_{1i} \|^{l_0-\sigma_i+\alpha}_{Q_1^{t_0-2,t_0},k(t,a)} \right) \leqslant Ce^{\beta t_0},$$

где C не зависит от t_0. Отсюда следует оценка (15) для u'. Оценка (15) для u'' вытекает из следующих неравенств, полученных с помощью оценок функций $G_{\nu ij}^1$ и R_{ij}^k, свойств функции ζ_{t_0}, неравенств (17) и (16):

$$| D_{t_0}^\mu D_x^\eta u_i''(t_0, x) | \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{t_0-1} e^{\gamma(t_0-\tau)+\beta\tau} (t_0 - \tau)^{n_i-\mu-1-\frac{n+|\eta|}{2b}} d\tau \times$$

$$\times \left[\int_{\Omega_0^\tau} E_c(|x - \xi|, t_0 - \tau)\, \chi(\tau, \xi)\, d\xi + \sum_{|k| \leqslant \rho_0} \int_{\Omega_1^\tau} (t_0 - \tau)^{\frac{|k|+1}{2b}} E_c(|x - \xi|, t_0 - \tau) \times \right.$$

$$\left. \times \chi(\tau, \xi)\, d\xi \right] + C \sum_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t_0-1} e^{\gamma(t_0-\tau)+\beta\tau} (t_0 - \tau)^{n_i-\mu-1-\frac{n-\sigma_j-1+|\eta|}{2b}} d\tau \times$$

$$\times \int_{\Omega_1^\tau} E_c(|x - \xi|, t_0 - \tau)\, \chi(\tau, \xi)\, d\xi \leqslant Ce^{\gamma t_0} \chi(t_0, x) \int_{-\infty}^{t_0-1} e^{(\beta-\gamma)\tau} d\tau = Ce^{\beta t_0} \chi(t_0, x),$$

$$|\eta| \leqslant M_{i\mu}, \quad \mu \leqslant n_i - 1, \; i = 1, \ldots, N.$$

Теоремы Лиувилля. Приведем ряд утверждений о свойствах решений однородной задачи (1).

Теорема 2. *Пусть* $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — *решение задачи* (1) *с* $f_\nu \equiv 0$, $\nu = 0, 1$, *такое, что для любого* $i = 1, \ldots, N$ *и* $t_0 \in (-\infty, T)$ $u_i \in$

$\in H_{k(t,a)}^{2bn_i+l_0+\alpha}(Q_0^{t_0,T})$. *Пусть функции Грина операторов A и B удовлетворяют условию* Γ_γ *с некоторым* γ.

1) *Если справедливы неравенства*

$$\begin{gathered} |D_t^\mu u_i(P)| \leqslant C\exp\{\delta t + k(t,a)|x|^{\frac{2b}{2b-1}}\}, \quad P\in Q_0^-; \\ |D_t^\mu D_x^k u_i(P)| \leqslant C\exp\{\delta t + k(t,a)|x|^{\frac{2b}{2b-1}}\}, \quad P\in Q_1^-, \\ i=1,\dots,N;\quad 0\leqslant\mu\leqslant n_i-1;\quad |k|\leqslant M_{i\mu}, \end{gathered} \tag{18}$$

где $\delta>\gamma$, $M_{i\mu}$ *определено в* [8], *то* $u_i\equiv 0$, $i=1,\dots,N$.

2) *Пусть неравенства* (18) *выполняются с* $\delta=\gamma$. *При* $\gamma<0$ *функции* $u_i(P)$, $i=1,\dots,N$, *есть полиномы по t и x степени не выше соответственно* $n_i-1-\rho/(2b)$ *и* $2b(n_i-1)+\rho$, *где* $\rho=0$, *когда* $M_{i\mu}=0$ *для всех i и* μ, *и* $\rho=l_0$ — *в остальных случаях. Если* $\gamma=0$, *то* $u_i(P)$, $i=1,\dots,N$, *не зависят от t и являются полиномами по x степени не выше* $2b(n_i-1)+\rho$. *При* $\gamma>0$ $u_i\equiv 0$, $i=1,\dots,N$.

3) *Если имеют место неравенства*

$$\begin{gathered} |D_t^\mu u_i(P)| \leqslant C\exp\{\gamma t\}(1+|x|)^\beta, \quad P\in Q_0^-, \\ |D_t^\mu D_x^k u_i(P)| \leqslant C\exp\{\gamma t\}(1+|x|)^\beta, \quad P\in Q_1^-, \\ i=1,\dots,N;\quad 0\leqslant\mu\leqslant n_i-1;\quad |k|\leqslant M_{i\mu}, \end{gathered} \tag{19}$$

и существуют производные $D_P^{\bar k}u_i(P)$, $|\bar k|\leqslant 2b(n_i-1)+\rho+[\beta]+1$, *то при* $\gamma<0$ *функции* $u_i(P)$, $i=1,\dots,N$, *есть полиномы по t и x степени не выше соответственно* $n_i-1+(\beta+\rho)/(2b)$ *и* β, *при* $\gamma=0$ *они не зависят от t и являются полиномами по x степени не выше* β, *а при* $\gamma>0$ $u_i\equiv 0$, $i=1,\dots,N$.

4) *Если* $\gamma=0$, *выполняются неравенства*

$$\begin{gathered} |D_t^\mu u_i(P)| \leqslant C(T+1-t)^{\beta_0}(1+|x|)^\beta, \quad P\in Q_0^-, \\ |D_t^\mu D_x^k u_i(P)| \leqslant C(T+1-t)^{\beta_0}(1+|x|)^\beta, \quad P\in Q_1^-, \\ i=1,\dots,N;\quad 0\leqslant\mu\leqslant n_i-1;\quad |k|\leqslant M_{i\mu}, \end{gathered}$$

и существуют производные $D_P^{\bar k}u_i(P)$, $|\bar k|\leqslant 2b(n_i-1)+\rho+[\beta_0+\beta]+1$, *то* $u_i(P)$, $i=1,\dots,N$, *есть полиномы по t и x степени не выше соответственно* β_0 *и* β.

Доказательство. В условиях теоремы для решения задачи (1) с $f_\nu\equiv 0$, $\nu=0, 1$, справедливо представление (10) из [8] при любом $t_0\in(-\infty, T)$. Если выполняются неравенства (18), то после перехода в этом представлении к пределу при $t_0\to-\infty$ получим, что $u_i\equiv 0$.

Пусть выполняются неравенства (18) с $\delta=\gamma$. Применим к обеим частям представления (10) из [8] оператор D_x^η и воспользуемся оценками функций $G_{2ij}^{1\mu}$, $R_{ij}^{\mu k}$, $V_{ij}^{\mu k}$, $Q_{ij}^{\mu k}$, неравенствами (18) и (16). Тогда приходим к оценкам

$$|D_x^\eta u_i(P)| \leqslant C\chi(P)\sum_{j=1}^N\sum_{\mu=0}^{n_j-1}\sum_{|k|\leqslant M_{j\mu}}(t-t_0)^{n_i-n_j+\mu+\frac{|k|-|\eta|}{2b}},$$

из которых после перехода к пределу при $t_0\to-\infty$ получаем $D_x^\eta u_i\equiv 0$ для $|\eta|\geqslant 2b(n_i-1)+\rho$. Так же доказывается, что $D_t^{\eta_0}u_i\equiv 0$ для $\eta_0>n_i-1+\rho/(2b)$. Отсюда с учетом (18) следует утверждение 2) теоремы.

Утверждения 3) и 4) теоремы устанавливаются аналогично. Так, например, при выполнении неравенства (19) с помощью представления (10) из [8] получаем оценки

$$|D_x^\eta u_i(P)| \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mu=0}^{n_j-1} \sum_{|k| \leqslant M_{j\mu}} (t-t_0)^{n_i-n_j+\mu+\frac{|k|+\beta-|\eta|}{2b}},$$

откуда вытекают тождества $D_x^\eta u_i \equiv 0$ для $|\eta| > 2b(n_i-1)+\rho+\beta$, а из них — то, что $u_i(P)$ — полином по x степени не выше $2b(n_i-1)+\rho+\beta$. Ввиду оценок (19) эта степень не выше β.

1. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем общего вида.— Мат. сб., 1981, **114**, № 1, с. 110—166; № 4, с. 523—565.
2. *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности.— Мат. сб., 1935, **42**, № 2, с. 199—215.
3. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена—Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений. — Функцион. анализ и его прил., 1974, **8**, № 4, с. 59—70.
4. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* О поведении решений общих параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях.— Докл. АН СССР, 1975, **220**, № 5, с. 1027—1030.
5. *Олейник О. А.* О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченных областях.— Успехи мат. наук, 1975, **30**, № 2, с. 219 — 220.
6. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий.— Дифференц. уравнения, 1978, **14**, № 2, с. 361—363.
7. *Ивасишен С. Д.* О теоремах Лиувилля для решений параболических граничных задач.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 12, с. 1071—1075.
8. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах растущих функций.—Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 1, с. 25—30.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
03.04.1981 г.