УДК 519.21

А. И. Моца

Предельные теоремы для стохастически непрерывных полей с условно независимыми приращениями

1. Пусть X — некоторое абстрактное пространство с σ-алгеброй измеримых подмножеств F_X, и на одном и том же вероятностном пространстве Ω, Σ, P для каждого $\varepsilon > 0$ определены измеримый по совокупности переменных (u, ω) случайный процесс $\eta_\varepsilon(u) = \eta_\varepsilon(u, \omega)$, $u \geqslant 0$, со значениями в X и числовое случайное поле $\gamma_\varepsilon(t, s)$, $t, s \geqslant 0$.

Пусть $g_\varepsilon(x)$, $x \in X$, — F_X-измеримая числовая положительная функция.

Если $\int_0^t g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(u))\, m(du)$ — конечная с вероятностью 1 для каждого $t > 0$ случайная величина, то процесс $\eta_\varepsilon(u)$, $u > 0$, будем называть g-интегрируемым. Здесь и в дальнейшем

$$\int_a^b f(x)\, m(dx) = \int_{[a,b)} f(x)\, m(dx), \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, m(dx)\, m(dy) =$$

$$= \int_{[a,b)\times[c,d)} f(x, y)\, m(dx)\, m(dy), \quad m(dx) \text{ — мера Лебега.}$$

Обозначим через $\mathfrak{N}_{\varepsilon t} = \sigma\{\eta_\varepsilon(u),\ u \in [0, t)\}$ σ-алгебру случайных событий, порожденную траекториями процесса $\eta_\varepsilon(u)$ на промежутке $[0, t)$.

Пусть $a_\varepsilon(x, y)$ — $F_X \times F_X$-измеримая числовая функция на $X \times X$, $\Pi_\varepsilon(x, y, D)$ — для каждого $D \in F_X$ неотрицательная $F_X \times F_X$-измеримая функция и для всех $(x, y) \in X \times X$ конечная мера на $(\mathcal{B}_R, R)$.

Обозначим

$$\psi_\varepsilon(\lambda, x, y) = i\lambda a_\varepsilon(x, y) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1 + u^2}\right) \frac{1 + u^2}{u^2} \Pi_\varepsilon(x, y, du).$$

Функцию $\psi_\varepsilon(\lambda, x, y)$ назовем $(g_\varepsilon, L_\varepsilon)$-подчиненной ($L_\varepsilon = \text{const} > 0$), если

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} g_\varepsilon^{-1}(x)\, g_\varepsilon^{-1}(y)\, |a_\varepsilon(x, y)| \leqslant L_\varepsilon,$$

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} g_\varepsilon^{-1}(x)\, g_\varepsilon^{-1}(y)\, \Pi_\varepsilon(x, y, R) \leqslant L_\varepsilon.$$

Очевидна оценка

$$\sup_{(x,y)\in X\times X} g_\varepsilon^{-1}(x)\, g_\varepsilon^{-1}(y)\, |\psi_\varepsilon(\lambda, x, y)| \leqslant L_\varepsilon(\lambda), \tag{1}$$

где $L_\varepsilon(\lambda) = \left(|\lambda| + \frac{\lambda^2}{2} + 2\right) L_\varepsilon$.

В силу (1) для g_ε-интегрируемого процесса $\eta_\varepsilon(u)$, $u \geqslant 0$, интеграл

$$\int_0^t \int_0^s \psi_\varepsilon(\lambda, \eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))\, m(dv)\, m(dw)$$

для всех $t, s \geqslant 0$ представляет собой конечную с вероятностью 1 комплекснозначную случайную величину.

Поле $\gamma_\varepsilon(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$, назовем $(g_\varepsilon, L_\varepsilon)$-полем с условно независимыми приращениями относительно g_ε-интегрируемого процесса $\eta_\varepsilon(u)$, $u \geqslant 0$, если

а) $\gamma_\varepsilon(t, 0) = \gamma_\varepsilon(0, s) \overset{P1}{=} 0$, t, $s \geqslant 0$;

б) для любых $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = T$, $N \geqslant 1$, $T > 0$

$$M \exp\left\{ i \sum_{n.k=1}^{N} \lambda_{kr} \Delta t_{k-1} t_k,\, s_{r-1} s_r \gamma_\varepsilon(\cdot, \cdot)/\mathfrak{N}_{\varepsilon T} \right\} \overset{P1}{=}$$

$$= \exp\left\{ \sum_{n,k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{s_{r-1}}^{s_r} \psi_\varepsilon(\lambda_{kr}, \eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))\, m(dv)\, m(dw) \right\},$$

где $\Delta_{t_1 t_2 s_1 s_2} \gamma(t, s) = \gamma(t_2, s_2) - \gamma(t_1, s_2) - \gamma(t_2, s_1) + \gamma(t, s_1)$.

Пусть $Z = \{\bar{z}_\varepsilon : \bar{z}_\varepsilon = \langle z_\varepsilon(t), t > 0 \rangle\}$ — пространство измеримых по t функций со значениями в X (пространство траекторий $\eta_\varepsilon(\cdot)$). Через $\mathcal{B}_Z$ будем обозначать борелевскую σ-алгебру подмножеств Z (минимальную σ-алгебру, содержащую все цилиндрические подмножества Z) и через $P_{\eta_\varepsilon}\{A\} = P\{\bar{\eta}_\varepsilon = \langle \eta_\varepsilon(u), u \geqslant 0 \rangle \in A\}$ — меру на $\mathcal{B}_Z$, порожденную процессом $\bar{\eta}_\varepsilon$.

Обозначим через

$$\nu_\varepsilon(A, t, \bar{z}) = \int_0^t \chi_A(\bar{z}_\varepsilon(s))\, m(ds)$$

время пребывания траектории $z_\varepsilon(\cdot)$ во множестве A на промежутке времени $[0, T]$.

Пусть $D \in F_x$, T, T', α, h, c, β — положительные числа и

$$A_{\varepsilon D}(t, T') = \{\bar{z} : \nu_\varepsilon(D, t, \bar{z}) > T'\},$$

$$B_{\varepsilon D}(c, t) = \left\{ \bar{z} : \int_0^t g_\varepsilon(z(u))\, \chi_{\bar{D}}(z(u))\, m(du) > c \right\},$$

$$E_{\varepsilon D}(h, \alpha, T) = \{\bar{z} : \Delta_u(h, \nu_\varepsilon(D, t, \bar{z}), T) > \alpha\},$$

$$H_\varepsilon(\beta, t) = \left\{ \bar{z} : \int_0^t g_\varepsilon(z(u))\, m(du) > \beta \right\},$$

где

$$\Delta_u(h, x(\cdot), T) = \sup_{0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant t' + h \leqslant T} | x(t'') - x(t') |$$

— модуль непрерывности равномерной топологии [1].

Теорема 1. *Пусть* $D \in F_X$ *и* $G_{\varepsilon D} = \sup\limits_{x \in D} g_\varepsilon(x) < \infty$. *Если* $\gamma_\varepsilon(t, s)$, t, $s \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ — *сепарабельное* $(g_\varepsilon, L_\varepsilon)$ - *поле с условно независимыми приращениями относительно* g_ε - *интегрируемого процесса* $\eta_\varepsilon(u)$, $u \geqslant 0$, *то для любых* h, T, $\delta > 0$

$$P\{\Delta_J(h, \gamma_\varepsilon(t, s), T) > \delta\} \leqslant P\{\eta_\varepsilon \in A_{\varepsilon D}(T, T')\} + P\{\eta_\varepsilon \in B_{\varepsilon D}(c, T)\} +$$

$$+ P\{\eta_\varepsilon \in E_{\varepsilon D}(h, \alpha, T)\} + P\{\eta_\varepsilon \in H_\varepsilon(\beta, T)\} + \frac{4G_{\varepsilon D}^2 K_\varepsilon(64\delta^{-1})\alpha^2}{1 - G_{\varepsilon D}^2 K_\varepsilon(64\delta^{-1})\alpha^2} +$$

$$+ \frac{4G_{\varepsilon D}^4 K_\varepsilon(64\delta^{-1}) K_\varepsilon(128\delta^{-1}) T'^2 \alpha^2}{[1 - G_{\varepsilon D}^2 K_\varepsilon(64\delta^{-1})\alpha^2]^2 [1 - G_{\varepsilon D}^2 K_\varepsilon(64\delta^{-1})\alpha^2]^2} + \tag{1'}$$

$$+ \frac{2K_\varepsilon(128\delta^{-1})(2\beta c + c^2)}{[1 - K_\varepsilon(256\delta^{-1})(2\beta c + c^2)][1 - 2K_\varepsilon(256\delta^{-1})(2\beta c + c^2)]},$$

где $\Delta_J(h, \gamma_\varepsilon(t, s), T)$ — *модуль непрерывности J-топологии* [2, 3]; $K_\varepsilon(u) = \left(u + \frac{u^2}{3} + 4\right) L_\varepsilon$ *и величины* α, c *выбраны так, что знаменатели в последних трех слагаемых справа в* (1′) *положительны.*

Теорема 1, доказательство которой аналогично приведенному в [4] для ступенчатых сумм условно независимых случайных величин, дает явные оценки для модуля непрерывности полей с условно независимыми приращениями. В качестве следствия теоремы 1 нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma_\varepsilon(t, s)$, $\varepsilon \geqslant 0$, — *сепарабельное* $(g_\varepsilon, L_\varepsilon)$-*поле с условно независимыми приращениями относительно* g_ε-*интегрируемого процесса* $\eta_\varepsilon(u)$, $u \geqslant 0$. *Тогда* $\gamma_\varepsilon(t, s)$, $\varepsilon \geqslant 0$, не имеют разрывсв второго рода.

Через V_ε, T_ε обозначим неслучайные положительные функции (причем необязательно считается, что $V_\varepsilon \to \infty$, $T_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$).

Следующая теорема также является следствием теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть для поля* $\gamma_\varepsilon(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ и *процессов* $\eta_\varepsilon(u)$, $u \geqslant 0$, *фигурирующих в теореме 1, выполняются условия*

A) $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} V_\varepsilon^2 L_\varepsilon = L < \infty$;

B) $\lim\limits_{\beta\to\infty} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{TT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(u))\, m(du) > \beta\right\} = 0$;

C) *существуют последовательности множеств* $D_{\varepsilon N} \in F_X$, $N \geqslant 1$, *таких, что*

1) $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \sup\limits_{x \in D_{\varepsilon N}} g_\varepsilon(x) = \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} G_{\varepsilon N} = G_N < \infty$, $N \geqslant 1$;

2) $\lim\limits_{T'\to\infty} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} P\{\eta_\varepsilon \in A_{\varepsilon D_{\varepsilon N}}(TT_\varepsilon, T'V_\varepsilon)\} = 0$;

3) $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} P\{\eta_\varepsilon \in E_{\varepsilon D_{\varepsilon N}}(hT_\varepsilon, \alpha V_\varepsilon, TT_\varepsilon)\} = 0$, $\alpha > 0$;

4) $\lim\limits_{N\to\infty} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{TT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(u))\, \chi_{\overline{D}_{\varepsilon N}}(\eta_\varepsilon(u))\, m(du) > c\right\} = 0, \quad c > 0.$

Тогда $\lim\limits_{h\to 0} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} P\{\Delta_J(h, \gamma_\varepsilon(tT_\varepsilon, sT_\varepsilon), T) > \delta\} = 0$, $\delta > 0$.

2. Рассмотрим условия сходимости в топологии J случайных полей на расширяющихся интервалах, т. е. рассмотрим случай, когда $0 < V_\varepsilon$, $T_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

Д) $V_\varepsilon^{-1} \nu_\varepsilon(A, tT_\varepsilon)$, $A \in F_X$, $t \geqslant 0 \Rightarrow \pi(A)\, \nu_t$, $A \in F_X$, $t \geqslant 0$, *при* $\varepsilon \to 0$, *где* $\pi(\cdot)$ — σ-*конечная мера на* F_X, ν_t — *непрерывный с вероятностью 1 строго монотонно возрастающий случайный процесс;*

E) 1) $V_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon(\lambda, x, y) \to \psi(\lambda, x, y)$, $x, y \in X$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где*

$$\psi(\lambda, x, y) = i\lambda a(x, y) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1 + u^2}\right) \frac{1 + u^2}{u^2}\, \Pi(x, y, du)$$

— *кумулянта безгранично делимого закона;*

2) $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} V_\varepsilon^2 L_\varepsilon = L < \infty$;

J) *существуют области* $D_N \subseteq D_{N+1} \subseteq, \ldots, D_N \uparrow X$ *такие, что*

1) $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} \sup\limits_{x \in D_N} g_\varepsilon(x) = \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} G_{\varepsilon N} = G_N < \infty$, $N \geqslant 1$;

2) $\pi(D_N) < \infty$, $N \geqslant 1$;

3) $\lim\limits_{N\to\infty} \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{TT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(u))\, \chi_{\overline{D}_N}(\eta_\varepsilon(u))\, m(du) > \beta\right\} = 0$, $\beta > 0$.

Тогда

1) $\psi(\lambda, x, y)$, $a(x, y)$, $\Pi(x, y, R)$ *интегрируемы по мере* $\pi \times \pi$ *на* $F_X \times \times F_X$ *и*

$$\psi_\pi(\lambda) = \int\limits_{X \times X} \psi(\lambda, x, y)\, \pi(dx)\, \pi(dy) = i\lambda a_\pi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG_\pi(u), \tag{2}$$

где

$$a_\pi = \int\limits_{X \times X} a(x, y)\, \pi(dx)\, \pi(dy), \qquad G_\pi(u) = \int\limits_{X \times X} \Pi(x, y, u)\, \pi(dx)\, \pi(dy);$$

2) *на каждом квадрате* $[0, T] \times [0, T]$ *поле* $\gamma_\varepsilon(tT_\varepsilon, sT_\varepsilon) \xrightarrow{J} \gamma_0(t, s)$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где* а) $\gamma_0(t, s) = \gamma(\nu_t, \nu_s)$, $t, s \geqslant 0$ — *сепарабельное однородное поле с независимыми приращениями с кумулянтой* $\psi_\pi(\lambda)$; б) ν_t, $t \geqslant 0$ — *непрерывный с вероятностью 1 строго монотонно возрастающий случайный процесс*; в) *поле* $\gamma(t, s)$, $t, s \geqslant 0$ *и процесс* ν_t, $t \geqslant 0$ *независимы.*

Замечание 1. Поскольку сепарабельное однородное поле с независимыми приращениями $\gamma(t, s)$ не имеет разрывов второго рода [5], а процесс ν_t монотонно не убывает и непрерывен, то их суперпозиция, поле $\gamma_0(t, s)$, также не имеет разрывов второго рода.

Замечание 2. Если области D_N выбраны так, что $G_{\varepsilon N} < \infty$ и $\lim\limits_{N\to\infty} P\{\eta_\varepsilon \in B_{\varepsilon D_N}(c, t)\} = 0$, $c > 0$, то

$$\lim_{N\to\infty} P\{\sup_{0 \leqslant s, t \leqslant T} |\gamma^-_{\varepsilon D_N}(t, s)| > \delta\} = 0.$$

Доказательство теоремы 4. Вначале проверяем условие компактности случайных полей $\gamma_\varepsilon(t, s)$ с условно независимыми приращениями, т. е. условия теоремы 3.

Условия A, C 1), C 4) в теореме 3 предполагаются выполненными (см. соответствующие условия E2), J1), J3) теоремы 4). Условие C 2) следует из слабой сходимости величин $\nu_\varepsilon(TT_\varepsilon, D_N) \Rightarrow \pi(D_N)\nu_T$ при $\varepsilon \to 0$. Условие C 3) следует также из монотонности процессов $\nu_\varepsilon(t, D_N)$ и слабой сходимости их конечномерных распределений к соответствующим конечномерным распределениям непрерывного процесса $\pi(D_N)\nu_T$.

В силу условия J 3) для произвольных $\beta \geqslant 1$, $\delta > 0$ найдется такой номер N, что

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{TT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(u))\, \chi_{\bar{D}_N}(\eta_\varepsilon(u))\, m(du) > \frac{\beta}{2}\right\} < \delta.$$

Из последнего неравенства и условий J 1), J 2), D следует оценка

$$\lim_{\beta\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{TT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(u))\, m(du) > \beta\right\} \leqslant \delta + \lim_{\beta\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{G_{\varepsilon N} V_\varepsilon^{-1} \nu_\varepsilon(TT_\varepsilon,\right.$$

$$\left. D_N) > \frac{\beta}{2}\right\} \leqslant \delta + \lim_{\beta\to\infty} P\left\{G_N \pi(D_N)\nu_T > \frac{\beta}{4}\right\} = \delta. \tag{3}$$

В силу произвольности δ из (3) следует справедливость условия B.

Таким образом, семейство случайных полей $\gamma_\varepsilon(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, компактно в J-топологии.

Для доказательства сходимости соответствующих конечномерных распределений представим случайное поле $\lambda_\varepsilon(t, s)$, $t, s \geqslant 0$ в виде

$$\gamma_\varepsilon(t, s), t, s \geqslant 0 \simeq \gamma^+_{\varepsilon D_N}(t, s) + \gamma^-_{\varepsilon D_N}(t, s), \quad t, s \geqslant 0 \tag{4}$$

(символ $\simeq$ понимается в смысле совпадения функций распределения случайных величин или конечномерных распределений случайных функций), где $\gamma^{\pm}_{\varepsilon D_N}(t, s)$ — $(g_\varepsilon, L_\varepsilon)$-подчиненные (по отношению к g_ε-интегрируемому процессу $\eta_\varepsilon(u)$, $u \geqslant 0$) поля с условно независимыми приращениями, для которых:

а) $\gamma^{\pm}_{\varepsilon D_N}(0, s) = \gamma^{\pm}_{\varepsilon D_N}(t, 0) \overset{P1}{=} 0,\ t,\ s \geqslant 0,\ \varepsilon \geqslant 0$;

б) для любых $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = T$, $N \geqslant 1$, $T > 0$

$$M\left\{\exp\left(i\sum_{k,r=1}^{N}[\lambda^{+}_{kr}\Delta_{t_{k-1}t_k;\,s_{r-1}s_r}\gamma^{+}_{\varepsilon D_N}(\cdot,\cdot) + \lambda^{-}_{kr}\Delta_{t_{k-1}t_k;\,s_{r-1}s_r}\gamma^{-}_{\varepsilon D_N}(\cdot,\cdot)]/\mathfrak{N}_T\right)\right\} \overset{P1}{=}$$

$$= \exp\left\{\sum_{k,r=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{s_{r-1}}^{s_n}[\psi(\lambda^{+}_{kr}, \eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(v))\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(w)) + \right.$$

$$\left. + \psi(\lambda^{-}_{kr}, \eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))(1 - \chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(v))\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(w)))]\, m(dv)\, m(dw)\right\},$$

Для совместной характеристической функции величин $\gamma^{+}_{\varepsilon D_N}(t_k T_\varepsilon, s_n T_\varepsilon)$ имеем такое представление:

$$M\exp\left\{i\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kr}\gamma^{+}_{\varepsilon D_N}(t_k T_\varepsilon, s_r T_\varepsilon)\right\} = M\exp\eta_{\varepsilon N}, \tag{5}$$

$$\eta_{\varepsilon N} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{0}^{t_k T_\varepsilon}\int\limits_{0}^{s_r T_\varepsilon}\psi_\varepsilon\left(\sum_{i=r}^{m}\sum_{j=k}^{n}\lambda_{ij}, \eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w)\right)\times$$

$$\times\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(v))\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(w))\, m(dv)\, m(dw).$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству соответствующей леммы 3 [4] для полей ступенчатых сумм условно независимых случайных величин.

Лемма. *Пусть для комплекснозначных $F_X \times F_X$-измеримых функций $f^{ij}_\varepsilon(x, y)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, k}$, $\varepsilon > 0$, выполняются условия D, J 2), а также*

G: $\nu_\varepsilon(t, D)$, $D \in F_X$, $t \geqslant 0 \Rightarrow \nu_0(t, D)$, $D \in F_X$, $t \geqslant 0$ при $\varepsilon \to 0$, *где* $\nu_\varepsilon(t, A) = \int\limits_0^t \chi_A(\eta_\varepsilon(u))\, m(du)$;

H) *функции* $f^{ij}_\varepsilon(x, y)$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, k}$, $\varepsilon \geqslant 0$,

1) *вырождаются в нуль вне множества* $\{(x, y) : (x, y) \in D \times D\}$;

2) *ограничены асимптотически равномерно на* $D \times D$, т. е.

$$\varlimsup_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\geqslant 0}}\ \sup_{(x,y)\in D\times D}\ \max_{i,j}|f^{ij}_\varepsilon(x, y)| = \varlimsup_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\geqslant 0}} a_\varepsilon = a < \infty;$$

3) *удовлетворяют условию*

$$\varlimsup_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon\geqslant 0}} f^{ij}_\varepsilon(x, y) = f^{ij}_0(x, y), \quad (x, y) \in D \times D.$$

Тогда $\varphi_\varepsilon(tT_\varepsilon, sT_\varepsilon)$, $t,\ s \geqslant 0 \Rightarrow \varphi(t, s)$, $t,\ s \geqslant 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где*

$$\varphi_\varepsilon(t, s) = V_\varepsilon^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_0^t\int\limits_0^s f^{ij}_\varepsilon(\eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))\chi_D(\eta_\varepsilon(v))\chi_D(\eta_\varepsilon(w))\, m(dv)\, m(dw),$$

$$\varphi(t, s) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{D\times D} f^{ij}(x, y)\,\pi(dx)\,\pi(dy)\,\nu_t\nu_s.$$

В силу леммы и представления (5) имеем

$$\omega_\varepsilon^N(t_k, s_r, k=\overline{1,n}, r=\overline{1,m}) = \exp \eta_{\varepsilon N} \Rightarrow \omega^N(t_k, s_r, k=\overline{1,n}, r=\overline{1,m}) =$$

$$= \exp\left\{\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{D_N\times D_N}\psi\left(\sum_{i=r}^{m}\sum_{j=k}^{n}\lambda_{ij}, x, y\right)\pi(dx)\pi(dy)\nu_{t_{k-1}t_k s_{r-1}s_r}\right\} \text{ при } \varepsilon\to 0.$$

Далее, в силу теоремы Хэлли имеем

$$M\omega_\varepsilon^N(t_k, s_r, k=\overline{1,n}, r=\overline{1,m}) \to M\omega^N(t_k, s_r, k=\overline{1,n}, r=\overline{1,m}) \text{ при } \varepsilon\to 0,$$

откуда следует соотношение

$$\gamma^+_{\varepsilon D_N}(tT_\varepsilon, sT_\varepsilon), t, s \geqslant 0 \Rightarrow \gamma^+_{0D_N}(\nu_t, \nu_s), t, s\geqslant 0 \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{6}$$

где $\gamma^+_{0D_N}(\nu_t, \nu_s)$ — случайное поле с совместной характеристической функцией выборочных значений

$$M\exp\left\{i\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kr}\gamma^+_{0D_N}(\nu_{t_k}, \nu_{s_r})\right\} = M\omega^N(t_k, s_r, k=\overline{1,n}, r=\overline{1,m}). \tag{7}$$

Докажем абсолютную интегрируемость функции $\psi(\lambda, x, y)$ по мере $\pi\times\times\pi$. Для этого достаточно показать, что

$$\int_{\overline{D_N\times D_N}}|\psi(\lambda, x, y)|\pi(dx)\pi(dy)\to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Рассмотрим оценку, которая имеет место в силу леммы и условий E 1), J

$$P\left\{\int_{\overline{D_N\times D_N}}|\psi(\lambda, x, y)|\pi(dx)\pi(dy)\nu_t\nu_s > \delta\right\} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} P\left\{\int_{D_{N+m}\times D_{N+m}\setminus D_N\times D_N}|\psi(\lambda, x, y)|\pi(dx)\pi(dy)\nu_t\nu_s>\delta\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-2}\int_0^{tT_\varepsilon}\int_0^{sT_\varepsilon}|V_\varepsilon^2\psi_\varepsilon(\lambda, \eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))[\chi_{D_{N+m}\times D_{N+m}}(\eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w)) -\right.$$

$$\left. - \chi_{D_N\times D_N}(\eta_\varepsilon(v), \eta_\varepsilon(w))]\, m(dv)\, m(dw) > \frac{\delta}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{\overline{L}_\varepsilon(\lambda)\int_0^{tT_\varepsilon}\int_0^{sT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(v))\, g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(w))[1-\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(v))\chi_{D_N}(\eta_\varepsilon(w))]\, m(dv)\times\right.$$

$$\left.\times m(dw) > \frac{\delta}{2}\right\} = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\left\{V_\varepsilon^{-2}\overline{L}_\varepsilon(\lambda)\left[\int_0^{tT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(v))\, m(dv)\int_0^{sT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(w))\,\chi_{\overline{D}_N}\times\right.\right.$$

$$\times(\eta_\varepsilon(w))\, m(dw) + \int_0^{tT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(v))\,\chi_{\overline{D}_N}(\eta_\varepsilon(v))\, m(dv)\int_0^{sT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(w))\, m(dw) +$$

$$\left.\left. + \int_0^{tT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(v))\,\chi_{\overline{D}_N}(\eta_\varepsilon(v))\, m(dv)\int_0^{sT_\varepsilon} g_\varepsilon(\eta_\varepsilon(w))\,\chi_{\overline{D}_N}(\eta_\varepsilon(w))\, m(dw)\right] > \frac{\delta}{2}\right\} = 0, \tag{8}$$

где $\overline{L}_\varepsilon(\lambda) = V_\varepsilon^2\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2} + |\lambda|\right)L_\varepsilon$.

Выражение справа в (8) равно нулю в силу условия $J3$) и соотношения (3).

В силу теоремы о сходимости [6, с. 314] из сходимости $V_\varepsilon^2 \psi_\varepsilon(\lambda, x, y) \to \psi(\lambda, x, y)$, x, $y \in X$ при $\varepsilon \to 0$ следует, что $V_\varepsilon^2 a_\varepsilon(x, y) \to a(x, y)$, x, $y \in X$ при $\varepsilon \to 0$ и $V^2{}_\varepsilon \Pi(x, y, R) \to \Pi(x, y, R)$, x, $y \in X$ при $\varepsilon \to 0$. Дальнейшее доказательство аналогично приведенному выше для $\psi_\varepsilon(\lambda, x, y)$.

Из абсолютной интегрируемости функций $a(x, y)$, $\Pi(x, y, R)$ по мере $\pi \times \pi$ и теоремы о повторном интегрировании получим (2).

Из представления (7) для совместной характеристической функции выборочных значений поля $\gamma^+_{0D_N}(\nu_t, \nu_s)$ и интегрируемости функции $\psi(\lambda, x, y)$ на $X \times X$ по мере $\pi \times \pi$ следует

$$\gamma^+_{0D_N}(\nu_t, \nu_s),\ t, s \geqslant 0 \Rightarrow \gamma_0(t, s),\ t, s \geqslant 0 \text{ при } N \to \infty, \tag{9}$$

где $\gamma_0(t, s)$, t, $s \geqslant 0$ имеет совместную характеристическую функцию выборочных значений в виде (2).

Поскольку (см. замечание 2)

$$\lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{|\gamma^-_{\varepsilon D_N}(t, s)| > \delta\} \leqslant \lim_{N\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} P\{\sup_{0\leqslant t,s\leqslant T} |\gamma^-_{\varepsilon D_N}(t, s)| > \delta\} = 0, \tag{10}$$

то, учитывая (4), (6), (9), (10), окончательно имеем

$$\gamma_\varepsilon(tT_\varepsilon, sT_\varepsilon),\ t, s \geqslant 0 \Rightarrow \gamma_0(t, s),\ t, s \geqslant 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Теорема 4 доказана.

1. *Мишура Ю. С.* О сходимости случайных полей ступенчатых сумм в равномерной топологии.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1978, вып. 19, с. 102—111.
2. *Мишура Ю. С.* О сходимости случайных полей в J-топологии.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1977, вып. 17, с. 102—110.
3. *Мишура Ю. С.* О сходимости случайных полей с независимыми приращениями в J-топологии.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 3—9.
4. *Моца А. И.* Общие условия сходимости в J-топологии полей ступенчатых сумм переключаемых случайных величин.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1981, вып. 26, с. 104—115.
5. *Каткаускайте Л. М.* Случайные поля с независимыми приращениями.— Лит. мат. сб, 1972, № 4, с. 89—95.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей.— М.: Изд-во иностр. лит. 1961.— 719 с.

Ужгородский
государственный университет

Поступила в редакцию
03.08.1981 г.