УДК 517.948

В. А. Гнатюк, В. С. Щирба

Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции

В монографиях [1—4] подытожены основные результаты теории наилучшего приближения по норме, преднорме, функции Минковского.

В данной статье общие свойства наилучшего приближения по норме, изложенные в работе [1], распространены на случай приближения по выпуклой непрерывной функции.

Некоторые определения и утверждения. Пусть X — линейное нормированное пространство, X^* — пространство, сопряженное к X, p — функция, заданная на X.

Преобразованием Юнга—Фенхеля функции p, или функцией, сопряженной к p, называется функция на X^*, определенная равенством

$$p^*(f) = \sup_{x \in X} (f(x) - p(x)).$$

Функция

$$p^{**}(x) = \sup_{f \in X^*} (f(x) - p^*(f)), \quad x \in X,$$

называется второй сопряженной к функции p.

Множество $\operatorname{dom} p^* = \{f \in X^* : p^*(f) < \infty\}$ называется эффективным множеством функции p^*.

Функция $p_\infty(x) = \sup_{f \in \operatorname{dom} p^*} f(x)$, $x \in X$, называется асимптотической функцией функции p.

Асимптотическим конусом F_∞ множества $F \subset X$ будем называть множество таких точек $z \in X$, что $u + tz \in F$ для любого элемента $u \in F$ и любого числа $t \geqslant 0$.

Инфимальной конволюцией функций p_1 и p_2, заданных на пространстве X, называется функция $p_1 \oplus p_2$, определенная равенством $(p_1 \oplus p_2)(x) = \inf_{u \in X} (p_1(x-u) + p_2(u))$.

Постановка задачи. В дальнейшем будем предполагать, что p — выпуклая непрерывная на X функция, а F — выпуклое подмножество пространства X.

Задачей наилучшего приближения по функции p элемента $x \in X$ множеством F будем называть задачу отыскивания величины

$$E(x) = \inf_{u \in F} p(x - u). \tag{1}$$

Величиной (1) задается на X некоторая функция E: каждому $x \in X$ ставится в соответствие $E(x)$. Назовем эту функцию функцией наилучшего приближения.

Если существует элемент $u_0 \in F$, реализующий в (1) точную нижнюю грань, т. е. такой, что $p(x - u_0) = E(x)$, то u_0 будем называть элементом наилучшего приближения. Множество F, обладающее тем свойством, что для любого $x \in X$ в нем существует элемент наилучшего приближения, называют множеством существования.

Выпуклость и непрерывность функции наилучшего приближения.

Теорема 1. *Функция наилучшего приближения выпукла на* X.

Доказательство. Пусть δ_F — индикаторная функция множества F, т. е. $\delta_F(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in F, \\ +\infty, & \text{если } u \notin F. \end{cases}$ Имеем

$$E(x) = \inf_{u \in F} p(x-u) = \inf_{u \in X} (p(x-u) + \delta_F(u)) = (p \oplus \delta_F)(x). \tag{2}$$

Следовательно, функция E является инфимальной конволюцией функций p и δ_F.

Так как p и δ_F — выпуклые функции, то, согласно [5, с. 179], E также выпукла.

Теорема 2. *Если функция E принимает конечное значение в некоторой точке $x_0 \in X$, то она непрерывна на X.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что функция E принимает конечные значения на X. Действительно, для всех $x \in X$ имеет место неравенство

$$E(x) = \inf_{u \in F} p(x-u) \leqslant p(x-\bar{u}) < \infty, \tag{3}$$

где $\bar{u}$ — фиксированная точка множества F.

С другой стороны, если бы $E(x) = -\infty$ в некоторой точке $x \in X$, то для точек x_0 и $x_t = x + t(x_0 - x)$ $(t > 1)$ в силу выпуклости и соотношения (3)

$$E(x_0) = E\left(\frac{1}{t}x_t + \left(1 - \frac{1}{t}\right)x\right) \leqslant \frac{1}{t}E(x_t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right)E(x) = -\infty,$$

что противоречит условию теоремы. Таким образом, $-\infty < E(x) < \infty$ для всех $x \in X$.

Кроме того, согласно (3) и непрерывности функции p, функция E ограничена сверху в некоторой окрестности произвольной точки $x \in X$. Поэтому она непрерывна в этой точке (см. [5, с. 181]).

Функция, сопряженная к функции наилучшего приближения. Для более полного исследования функции E используем функцию E^*, сопряженную к E.

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$E^*(f) = p^*(f) + \sup_{u \in F} f(u), \quad f \in X^*; \tag{4}$$

$$\operatorname{dom} E^* = M \triangleq \{f \in \operatorname{dom} p^* : \sup_{u \in F} f(u) < +\infty\}. \tag{5}$$

Доказательство. Учитывая соотношение (2) и теорему 1 [5, с. 188], можно записать

$$E^*(f) = (p \oplus \delta_F)^*(f) = p^*(f) + \delta_F(f).$$

И так как $\delta^*_F(f) = \sup_{u \in X}(f(u) - \delta_F(u)) = \sup_{u \in F} f(u)$, то отсюда вытекает справедливость равенства (4). Соотношение (5) непосредственно следует из равенства (4).

Замечание 1. Если F — конус, то

$$M = \{f \in \operatorname{dom} p^* : \sup_{u \in F} f(u) = 0\}.$$

Из этого замечания и теоремы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Если F—конус, то $E^*(f) = p^*(f)$ для всех $f \in \operatorname{dom} E^*$.*

Теорема 4. *Для того чтобы функция E принимала конечные значения на X, необходимо и достаточно, чтобы $M \neq \varnothing$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция E принимает конечные значения на X. Тогда в силу теорем 1 и 2 E — выпуклая непрерывная функция. Поэтому (см. [5, с. 185]) E^* — собственная функция, т. е. $\operatorname{dom} E^* = M \neq \varnothing$ и $E^*(f) > -\infty$ для всех $f \in X^*$.

Достаточность. Пусть $f_0 \in M$. Тогда $E(f_0) < \infty$. В силу неравенства Юнга—Фенхеля (см. [5, с. 183]) отсюда получим $E(x) \geqslant f_0(x) - E^*(f_0) > -\infty$ для всех $x \in X$. С другой стороны, согласно (3) $E(x) < \infty$ $\forall x \in X$. Следовательно, функция E принимает конечные значения на X. Теорема доказана.

С целью исключения из рассмотрения тривиального случая, когда $E(x) \equiv -\infty$, в дальнейшем будем считать, что $M \neq \varnothing$.

Общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения.

Лемма 1. *Пусть F — локально-компактное множество, $\{u_m\}$ — последовательность точек этого множества такая, что* $\lim\limits_{m\to\infty} \| u_m \| = \infty$. *Тогда существует сходящаяся подпоследовательность* последовательности $\{v_m\}$, *где* $v_m = \dfrac{u_m}{\| u_m \|}$.

Доказательство. Учитывая выпуклость множества F, можно заключить, что при достаточно больших m множеству F будут принадлежать точки $w_m = \left(1 - \dfrac{1}{\| u_m \|}\right) u_1 + \dfrac{1}{\| u_m \|} u_m$. И так как последовательность $\{w_m\}$ ограничена ($\| w_m \| \leqslant \| u_1 \| + 1$ при достаточно больших m), а F — локально-компактное множество, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{w_{m_j}\}$ последовательности $\{w_m\}$. Пусть $\lim\limits_{j\to\infty} w_{m_j} = w_0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{j\to\infty} v_{m_j} = \lim_{j\to\infty} \frac{u_{m_j}}{\| u_{m_j} \|} = \lim_{j\to\infty} \left(w_{m_j} - \left(1 - \frac{1}{\| u_{m_j} \|}\right) u_1 \right) = w_0 - u_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть F — замкнутое локально-компактное множество, $\{x_m\}$ — ограниченная последовательность пространства X, $\{u_m\}$ — неограниченная последовательность множества F и числовая последовательность $\{p(x_m - u_m)\}$ ограничена сверху. Тогда существует ненулевой элемент z множества F_∞ такой, что $p_\infty(-z) \leqslant 0$.*

Доказательство. Пусть $\{u_{m_j}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, для которой $\lim\limits_{j\to\infty} \| u_{m_j} \| = \infty$. Согласно лемме 1 существует сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{v_{m_j}\}$, где $v_{m_j} = \dfrac{u_{m_j}}{\| u_{m_j} \|}$. Будем считать, что уже последовательность $\{v_{m_j}\}$ сходится. Пусть $\lim\limits_{j\to\infty} v_{m_j} = z$. Учитывая это, можем заключить, что при достаточно больших j множеству F будут принадлежать точки последовательности

$$\left\{ \left(1 - \frac{t}{\| u_{m_j} \|}\right) u_1 + \frac{t}{\| u_{m_j} \|} u_{m_j} \right\}$$

и ее предел, т. е. точка $u_1 + tz$, где t — произвольное неотрицательное число. Отсюда следует (см. [3, с. 345]), что $z \in F_\infty$.

Так как последовательность $\{p(x_m - u_m)\}$ ограничена сверху, то существует число c такое, что $p(x_m - u_m) \leqslant c$ $\forall m = 1, 2, \ldots$. Из выпуклости функции p для произвольного числа $t \geqslant 0$ при достаточно больших j получим, что

$$p\left(\left(1 - \frac{t}{\| u_{m_j} \|}\right)(x_1 - u_1) + \frac{t}{\| u_{m_j} \|}(x_{m_j} - u_{m_j}) \right) \leqslant \left(1 - \frac{t}{\| u_{m_j} \|}\right) \times$$

$$\times p(x_1 - u_1) + \frac{t}{\| u_{m_j} \|} p(x_{m_j} - u_{m_j}) \leqslant \left(1 - \frac{t}{\| u_{m_j} \|}\right) c + \frac{t}{\| u_{m_j} \|} c = c.$$

Тогда в силу непрерывности функции p и ограниченности последовательности $\{x_m\}$ имеем

$$\lim_{j\to\infty} p\left(\left(1-\frac{t}{\|u_{m_j}\|}\right)(x_1-u_1)+\frac{t}{\|u_{m_j}\|}(x_{m_j}-u_{m_j})\right)=p(x_1-u_1-tz)\leqslant c$$

для всех $t\geqslant 0$. Поэтому (см. [3, с. 347 и 348])

$$p_\infty(-z)=\lim_{t\to\infty}\frac{p(x_1-u_1+t(-z))-p(x_1-u_1)}{t}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{t\to\infty}\frac{c-p(x_1-u_1)}{t}=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F — замкнутое локально-компактное множество, $\{x_m\}$ — ограниченная последовательность пространства X, $u_m\in F$ для всех $m\in N$, $p(-w)\to+\infty$ при $w\in F$, $\|w\|\to\infty$. Тогда, если числовая последовательность $\{p(x_m-u_m)\}$ ограничена сверху, то последовательность $\{u_m\}$ ограничена.*

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{u_m\}$ неограничена. Тогда в силу предыдущей леммы существует ненулевой элемент $z\in F_\infty$ такой, что $p_\infty(-z)\leqslant 0$. Поэтому (см. [3, с. 347])

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{p(-u_1+t(-z))-p(-u_1)}{t}=p_\infty(-z)\leqslant 0.$$

Так как функция $t\to\dfrac{p(-u_1+t(-z))-p(-u_1)}{t}$ не убывает (см. [3, с. 347]), то отсюда следует, что $p(-u_1+t(-z))\leqslant p(-u_1)$ для всех $t\geqslant 0$. Это приводит к противоречию, так как при $t_m\to+\infty$ получим, учитывая соотношение $z\in F_\infty$, что $w_m=u_1+t_m z\in F$, $\lim\limits_{m\to\infty}\|w_m\|=\infty$. Следовательно, по условию леммы $p(-w_m)=p(-u_1+t_m(-z))\to+\infty$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Если F — замкнутое локально-компактное множество, $p(-w)\to+\infty$ при $w\in F$, $\|w\|\to\infty$, то F является множеством существования.*

Доказательство. Нужно показать, что для любого $x\in X$ в множестве F существует элемент наилучшего приближения. Фиксируем $x\in X$. Так как $M\neq\varnothing$, то

$$\inf_{u\in F}p(x-u)=E(x)=d>-\infty.$$

Согласно определению точной нижней грани для каждого $m=1,2,\ldots$ существует элемент $u_m\in F$ такой, что $p(x-u_m)<d+\dfrac{1}{m}$.

Поэтому последовательность $\{p(x-u_m)\}$ ограничена сверху. Тогда в силу леммы 3 последовательность $\{u_m\}$ ограничена. Поскольку множество F локально-компактно, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{u_{m_j}\}$ последовательности $\{u_m\}$. Пусть $\lim\limits_{j\to\infty}u_{m_j}=u_0$. В силу замкнутости множества F точка $u_0\in F$. Теперь, перейдя к пределу при $j\to\infty$ в неравенствах

$$d\leqslant p(x-u_{m_j})\leqslant d+\frac{1}{m_j},\quad j=1,2,\ldots,$$

получим $p(x-u_0)=d$, т. е. u_0 является элементом наилучшего приближения точки x в множестве F. Теорема доказана.

Следствие 2. *Если F — замкнутое локально-компактное множество, $p_\infty(-z)>0$ для всех $z\in F_\infty$, $z\neq 0$, то F является множеством существования.*

Следствие 3. *Если F — замкнутое локально-компактное множество, содержащее нуль, и $p_\infty(-u)>0$ для всех $u\in F$, $u\neq 0$, то F — множество существования.*

Следствие 4. *Если F — конечномерное пространство, $F_1 = \{u \in F: p_\infty(u) = 0\}$ — подпространство, то F — множество существования.*

Касаясь вопроса единственности элемента наилучшего приближения, приведем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть элемент $x \in X$ и функция p таковы, что из равенства $p(\alpha(x-u_1) + (1-\alpha)(x-u_2)) = \alpha p(x-u_1) + (1-\alpha)p(x-u_2)$ $(u_1 \in F,\ u_2 \in F,\ \alpha \in]0, 1[)$ следует существование элемента $z \in X$, удовлетворяющего условиям: 1) $x - u_1 - z = c(x - u_2 - z)$, $c \geqslant 0$; 2) функция $\varphi(t) = p(z + t(x - u_2 - z))$ строго монотонна на промежутке $[0, +\infty[$ при $x - u_2 - z \neq 0$. Тогда, если для элемента x в множестве F существует элемент наилучшего приближения, то он единственен.*

Заметим, что условиям теоремы 6, которую можно доказать методом от противного, удовлетворяет норма строго нормированного пространства, строго выпуклая и ряд других функций.

Общие свойства оператора наилучшего приближения. В этом пункте будем предполагать, что F — множество существования и единственности.

Рассмотрим свойства оператора g, сопоставляющего элемент $x \in X$ с элементом наилучшего приближения $g(x)$.

Теорема 7. *Пусть F — конус. Если для произвольных точек x_1 и x_2 пространства X из условия $p(x_1) \leqslant p(x_2)$ следует, что $p(tx_1) \leqslant p(tx_2)$ для всех $t > 0$, то g — положительно-однородный оператор.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и число > 0. Используя условия теоремы, можем записать

$$p(tx - tg(x)) = p(t(x - g(x))) \leqslant p(t(x-u)) = p(tx - tu)$$

для всех $u \in F$. Поскольку F — конус, то отсюда следует, что

$$p(tx - tg(x)) = \min_{u \in F} p(tx - tu) = \min_{u \in F} p(tx - u) = p(tx - g(tx)).$$

Таким образом, для всех $x \in X$ и $t > 0$ справедливо равенство $g(tx) = tg(x)$. В частности, при $x = 0$ и $t = 2$ из этого равенства получим $g(2 \cdot 0) = g(0) = 2g(0)$. Поэтому $g(0) = 0$. Тогда $g(0 \cdot x) = g(0) = 0 \cdot g(x)$ для всех $x \in X$ и $t = 0$. Теорема доказана.

Легко видеть, что условию доказанной теоремы удовлетворяют положительно-однородные и ряд других функций.

Следствие 5. *Пусть F — подпространство. Если функция p удовлетворяет условиям теоремы 7 и, кроме того, является четной, то g — однородный оператор.*

Теорема 8. *Пусть F — замкнутое локально-компактное множество. Если $p(-w) \to +\infty$ при $\|w\| \to \infty$ $(w \in F)$, то оператор g непрерывен.*

Доказательство. Пусть $x_m \to x_0$, $u_m = g(x_m)$ и $u_0 = g(x_0)$. Поскольку для фиксированного элемента $\bar{u} \in F$ $p(x_m - u_m) = p(x_m - g(x_m)) \leqslant p(x_m - \bar{u})$ и $\lim\limits_{m \to \infty} p(x_m - \bar{u}) = p(x_0 - \bar{u})$, то последовательность $\{p(x_m - u_m)\}$ ограничена сверху. И так как последовательность $\{x_m\}$ ограничена, то, используя лемму 3, заключаем, что последовательность $\{u_m\}$ также ограничена.

Предположим, что $u_m \not\to u_0 = g(x_0)$. Тогда в силу локальной компактности множества F найдется подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$ такая, что $u_{m_k} \to u' \neq u_0$, причем $u' \in F$, ибо F замкнуто. Но $u_{m_k} = g(x_{m_k})$ — элемент наилучшего приближения для x_{m_k}. Поэтому $p(x_{m_k} - u_{m_k}) \leqslant p(x_{m_k} - u_0)$.

Отсюда при $k \to \infty$ с учетом непрерывности функции p получим $p(x_0 - u') \leqslant p(x_0 - u_0)$, что противоречит единственности элемента наилучшего приближения. Полученное противоречие доказывает, что $\lim\limits_{m \to \infty} g(x_m) = g(x_0)$.

С о о т н о ш е н и я д в о й с т в е н н о с т и и к р и т е р и и э л е м е н т а н а и л у ч ш е г о п р и б л и ж е н и я. Используя равенство (4), легко доказать так называемые соотношения двойственности, сводящие задачу наилучшего приближения к двойственной задаче и позволяющие указать критерии элемента наилучшего приближения.

Т е о р е м а 9. *Для любого элемента* $x \in X$ *справедливо соотношение*

$$E(x) = \inf_{u \in F} p(x - u) = \max_{f \in M} (f(x) - p^*(f) - \sup_{u \in F} f(u)).$$

С л е д с т в и е 6. *Если* F — *конус, то*

$$E(x) = \inf_{u \in F} p(x - u) = \max_{f \in M} (f(x) - p^*(f)).$$

Т е о р е м а 10. *Для того чтобы* $u_0 \in F$ *был элементом наилучшего приближения для точки* $x \in X$, *необходимо и достаточно существование функционала* $f_0 \in X^*$ *со следующими свойствами:* 1) $f_0 \in M$; 2) $p(x - u_0) = f_0(x - u_0) - p^*(f_0)$; 3) $f_0(u_0) = \sup_{u \in F} f_0(u)$.

С л е д с т в и е 7. *Пусть* F — *конус. Для того чтобы элемент* $u_0 \in F$ *был элементом наилучшего приближения для* $x \in X$, *необходимо и достаточно существование функционала* $f_0 \in X^*$, *удовлетворяющего условиям:* 1) $f_0 \in M$; 2) $p(x - u_0) = f_0(x) - p^*(f_0)$.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближения.— М. : Изд-во Мос. ун-та, 1976.— 304 с.
3. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация.— М. : Мир, 1975.— 496 с.
4. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.— М.: Наука, 1973.— 551 с.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач.— М.: Наука, 1974.— 479 с.

Каменец-Подольский педагогический институт
Киевский педагогический институт

Поступила в редакцию 25.05.1981 г.,
после переработки 15.03.1982 г.