УДК 517.549

Р. Кауфман

Некоторые замечания об интерполяции аналитических функций и логарифмических производных

Пусть $a_n = 1 - 2^{-n}$ и p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — натуральные числа.

Теорема. *Существует функция* $F(z)$, *мероморфная при* $|z| < 1$, *такая, что* $|F'| > |F|$ *и* F *имеет в* a_n *нуль порядка* $> p_n$.

Что касается роста $N(r, 1/F)$, этот результат усиливает теорему А. А. Гольдберга (см. [1], теорема 1) и основывается на сходных идеях об интерполяции ограниченных аналитических функций и, в частности, на следующей лемме (см. напр., [2, с. 149, 155]).

Лемма 1. *Пусть* $|b_n - a_n| \leqslant 2^{-n-2}$, *так что* $1 - |b_{n+1}| \leqslant (5/6)(1 - |b_n|)$. *Если* $|w_n| \leqslant 1$, *то существует функция* f, *аналитическая при* $|z| < 1$, *такая, что* $f(b_n) = w_n$ *и* $|f| < C_1$ ($C_1, C_2, \ldots$ — *абсолютные положительные постоянные*).

Лемма 2. *Предположим, что* $|w_n| \leqslant 1$ *и* $|\widetilde{w}_n - w_n| \leqslant 2^n |b_n - a_n|$. *Тогда существует функция* g, *аналитическая при* $|z| < 1$, *такая, что* $g(b_n) = w_n$, $g(a_n) = \widetilde{w}_n$, $|g| < C_2$.

Доказательство. Пусть f — функция из леммы 1, а $\widetilde{\mathcal{B}}$ — произведение Бляшке с множеством нулей $(b_n)_0^\infty$. Легко видеть, что $|\widetilde{\mathcal{B}}(a_n)| \geqslant C_3 |b_n - a_n| |1 - \overline{b}_n a_n|^{-1}$. Далее, $|1 - \overline{b}_n a_n| \leqslant 3 \cdot 2^{-n}$, откуда $|\widetilde{\mathcal{B}}(a_n)| \geqslant$

$\geqslant 2^{n-2}C_3|b_n-a_n|$. Кроме того, $|f(a_n)-\tilde{w}_n|\leqslant|f(a_n)-f(b_n)|+|f(b_n)-$ $-\tilde{w}_n|\leqslant 2^{n+1}C_1|b_n-a_n|+2^n|b_n-a_n|<2^{n+2}C_1|b_n-a_n|$. Следовательно, по лемме 1 существует аналитическая при $|z|<1$ функция h такая, что $f(a_n)+\tilde{\mathcal{B}}(a_n)h(a_n)=\tilde{w}_n$, $|h|<2^4C_1^2C_3^{-1}$. Положим $g=f+\tilde{\mathcal{B}}h$, $C_2=C_1+$ $+2^4C_1^2C_3^{-1}$.

Теперь выберем b_n так, чтобы $|b_n-a_n|<4^{-n-1}(1+p_n)^{-1}$, и обозначим через $\mathcal{B}_k$ произведение Бляшке с множеством нулей $(a_n)_{n\neq k}\cup(b_n)_{n=k}$, а через $\mathcal{B}$ — произведение Бляшке с множеством нулей $(a_n)_0^\infty\cup(b_n)_0^\infty$.

Лемма 3. $\mathcal{B}'(a_n)=-\mathcal{B}'(b_n)\exp\xi_n$, *где* $|\xi_n|\leqslant C_4 2^n|b_n-a_n|$.

Доказательство.

$$\mathcal{B}'(a_n)=c_n\mathcal{B}_n(a_n)(a_n-b_n)(1-|a_n|^2)^{-1}(1-a_n\bar{b}_n)^{-1},$$

$$\mathcal{B}'(b_n)=c_n\mathcal{B}_n(b_n)(b_n-a_n)(1-|b_n|^2)^{-1}(1-\bar{a}_nb_n)^{-1},$$

где $|c_n|=1$. На отрезке, соединяющем a_n и b_n, выполняется неравенство $|\mathcal{B}_n'/\mathcal{B}_n|\leqslant C_5 2^n$. Отношения остальных множителей оцениваются элементарно.

Доказательство теоремы теперь можно легко завершить. Так как $|\mathcal{B}'(a_n)|<(1+p_n)^{-1}$, $|\mathcal{B}'(b_n)|<(1+p_n)^{-1}$, то можно выбрать последовательности (w_n), $(\tilde{w}_n)$ так, чтобы: 1) $\mathcal{B}'(b_n)\exp w_n=(-1)N_n^{-1}$, $\mathcal{B}'(a_n)\times$ $\times\exp\tilde{w}_n=N_n^{-1}$, где $N_n=[|\mathcal{B}'(b_n)|^{-1}]\geqslant p_n$ — целое число; 2) $|w_n|\leqslant\pi+$ $+\log 2<4$; 3) $|w_n-\tilde{w}_n|\leqslant C_4 2^n|b_n-a_n|$. Следовательно, существует аналитическая функция h такая, что $h(b_n)=w_n$, $h(a_n)=\tilde{w}_n$, $|h|\leqslant C_6$.

Пусть теперь $m>\exp C_6$ — целое число. Уравнение $F'/F=m\mathcal{B}^{-1}e^{-h}$ определяет мероморфную функцию F с нулем порядка $mN_n>p_n$ в точке a_n и $|m\mathcal{B}^{-1}e^{-h}|>1$. Это завершает доказательство теоремы.

Легко сформулировать аналогичную проблему для функций, мероморфных в плоскости. Пусть функция $h(r)>1$ определена при $r>0$ и $r^{-n}h(r)\to\infty$, $r\to+\infty$ для $n=1,2,3,\ldots$. Что можно сказать о $N(r,f)$ и $T(r,f)$, если $|f'(z)/f(z)|>1/h(|z|)$?

1. *Гольдберг А. А.* О росте мероморфных в круге функций с ограничениями на логарифмическую производную.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 4, с. 456—462.

2. *Duren P. L.* Theory of H^p spaces.— New York; London : Acad. press, 1970.— 258 p.

США

Поступила в редакцию
09.02.1981 г.