УДК 517.5

Н. П. Корнейчук

О приближении локальными сплайнами минимального дефекта

Пусть C и L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространства заданных на отрезке $[0, 1]$ функций $f(t)$ с обычной нормой, C^m и L_p^m, $m = 1, 2, \ldots$, — множество m-х интегралов от $f(t)$ соответственно из C и L_p. Через S_N^r обозначим множество полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 по равномерному разбиению $t_k = k/N$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Известно [1 — 3], что сплайны $\sigma_r(f, t)$ из S_N^r, интерполирующие при определенных краевых условиях в точках

$$\tau_k = k/N - [1 + (-1)^r]/4N, \qquad (1)$$

обладают в некоторых ситуациях наилучшими аппроксимативными свойствами, обеспечивая на ряде классов функций погрешность, не превышающую колмогоровский поперечник. Однако с вычислительной точки зрения эти сплайны при $r \geqslant 2$ представляют неудобства, связанные с тем, что значение $\sigma_r(f, t)$ в каждой точке t зависит от значений функции $f(t)$ во всех точках τ_k. То обстоятельство, что эта зависимость довольно быстро ослабевает с удалением от точки t, привело к идее построения сплайнов, использующих информацию о значениях функции $f(t)$ лишь в точках, близких к t. Такие сплайны естественно строить в виде линейных комбинаций B-сплайнов с коэффициентами, определяемыми значениями $f(t)$ в точках τ_k, принадлежащих носителю B-сплайна. Оказалось, что при определенном выборе этих коэффициентов погрешность аппроксимации на классах функций соответствующей гладкости имеет наилучший порядок [4, 5].

Везде ниже будем обозначать через n целую часть $r/2$, т. е. $n = [r/2]$, и полагать $h = 1/N$.

Считая, что точки $t_k = k/N$ и τ_k (см. (1)), определены при всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, рассмотрим систему B-сплайнов [4, 6] $B_{r,k}(t)$ порядка r, для которых

$$\max_t B_{r,k}(t) = B_{r,k}(\tau_k), \quad \sum_k B_{r,k}(t) \equiv 1.$$

Носитель сплайна $B_{r,k}(t)$ определяется неравенствами $|t - \tau_k| \leqslant (n+1)h$ при r нечетном и $|t - \tau_k| \leqslant (n + 0{,}5)h$ — при r четном.

Положим для $r \geqslant 2$

$$S_r(f, t) = S_{N,r}(f, t) = \sum_k \sum_{i=-n}^{n} \gamma_i f(\tau_{k+i}) B_{r,k}(t), \qquad (2)$$

где коэффициенты γ_i выбраны из условия точности формулы $s_r(f, t) \sim f(t)$ для многочленов степени r. Такой выбор можно осуществить, причем единственным образом (см. [4], гл. IX). Чтобы определить сплайн $s(f, t)$ на всем отрезке [0, 1], надо, чтобы функция $f(t)$ была задана на отрезке $[a, b]$, содержащем носители всех B-сплайнов, не обращающихся тождественно в нуль на [0, 1]. При необходимости функцию $f(t)$ из L_1^m можно доопределить на $[a, b]$, полагая, например, $f^m(t) = 0$ для $t \in [a, b] \setminus [0, 1]$. Функцию $f(t)$ из C^m можно продолжить на $[a, b]$, сохраняя непрерывность производной $f^{(m)}(t)$ и не увеличивая ее норму и модуль непрерывности. В дальнейшем функции из L_p^m и C^m предполагаются заданными на $[a, b]$, а приближение сплайнами (2) осуществляется на отрезке [0, 1], причем ясно, что $s_r(f, t) \in S_N^r$.

Функцию $f(t)$ из L_1^{m+1} можно представить в виде

$$f(t) = p_m(t) + \frac{1}{m!} \int_a^b (t-u)_+^m f^{(m+1)}(u)\, du,$$

где $p_m(t)$ — многочлен степени m, $(t-u)_+^m = [\max\{0; (t-u)\}]^m$. Если $m \leqslant r$, то в силу точности для многочленов степени r

$$f(t) - s_r(f, t) = \int_a^b K_{r,m}(t, u) f^{(m+1)}(u)\, du, \qquad (3)$$

где

$$K_{r,m}(t, u) = \frac{1}{m!}\left[(t-u)_+^m - \sum_k \sum_{i=-n}^{n} \gamma_i (\tau_{k+i} - u)_+^m B_{r,k}(t)\right].$$

Ясно, что задача оценки погрешности (3) в различных ситуациях сводится к изучению свойств ядра $K_{r,m}(t, u)$ и оценке его количественных характеристик. В случае $m=r$ имеем ядро

$$K_r(t, u) = K_{r,r}(t, u) = \frac{1}{r!}\left[(t-u)_+^r - \sum_k \sum_{i=-n}^{n} \gamma_i (\tau_{k+i}-u)_+^r B_{r,k}(t)\right],$$

причем очевидно, что

$$\partial^\nu K_r(t, u)/\partial u^\nu = (-1)^\nu K_{r,r-\nu}(t, u), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, r.$$

Рассматривая функцию $K_r(t, u)$ на всей плоскости, отметим следующие ее свойства:

1) $K_r(t, u)$ по каждой переменной есть сплайн порядка r дефекта 1 по сетке $\{t_k\}$ с дополнительным узлом $t=u$ или $u=t$;

2) $K_r(t+h, u+h) = K_r(t, u)$;

3) $K_r(\tau_k + x, \tau_k + y) = (-1)^{r-1} K_r(\tau_k - x, \tau_k - y)$; при нечетном r $K_r(t, u) \equiv K_r(u, t)$;

4) при каждом фиксированном t ядро $K_r(t, u)$ как функция от u обращается в нуль вместе со своими производными до r-го порядка вне отрезка $[\alpha_r, \beta_r] = [\alpha_r(t), \beta_r(t)]$; при r нечетном $[\alpha_r, \beta_r] = [\tau_{j-r}, \tau_{j+r-1}]$, если $\tau_{j-1} < t < \tau_j$, и $[\alpha_r, \beta_r] = [\tau_{j-r+1}, \tau_{j+r-1}]$, если $t = \tau_j$; в случае четного r $[\alpha_r, \beta_r] = [\tau_{j-r}, \tau_{j+r}]$, если $t_{j-1} < t < t_j$, и $[\alpha_r, \beta_r] = [\tau_{j-r+1}, \tau_{j+r}]$ — если $t = t_j$;

5) если r нечетно, то при фиксированном t

$$\operatorname{sgn} K_r(t, u) = (-1)^{n+1}, \quad \alpha_r < u < \beta_r,$$

причем $K_r(t, u)$ по переменной u имеет ровно два промежутка строгой монотонности. Если же r — четное, то $K_r(t, u)$ как функция от u меняет знак на $[\alpha_r, \beta_r]$ ровно один раз и, в частности, $K_r(t_k, t_k) = K_r(\tau_k, \tau_k) = 0$, кроме того,

$$\int_{\alpha_r}^{\beta_r} K_r(t_k, u)\, du = \int_{\alpha_r}^{\beta_r} K_r(\tau_k, u)\, du = 0.$$

Введем в рассмотрение классы W_p^m, $m = 1, 2, \ldots$, функций $f(t)$ из L_p^m, у которых $\|f^{(m)}\|_p = \|f^{(m)}\|_{L_p} \leqslant 1$, а также классы $W^m H^\omega$, $m = 1, 2, \ldots$, функций $f \in C^m$, у которых модуль непрерывности $\omega(f^{(m)}, \delta)$ m-й производной не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$.

Если $f(t) \in L_p^{m+1}$, $m \leqslant r$, то из представления (3) следует, что

$$|f(t) - s_r(f, t)| \leqslant \|K_{r,m}(t, \cdot)\|_{p'} \|f^{(m+1)}\|_p, \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

причем для каждого t эта оценка неулучшаема, так что

$$\sup_{f \in W_p^{m+1}} |f(t) - s_r(f, t)| = \|K_{r,m}(t, \cdot)\|_{p'},$$

$$\sup_{f \in W_p^{m+1}} \|f - s_r(f)\|_C = \max \|K_{r,m}(t, \cdot)\|_{p'}.$$

Если $\omega(\delta)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности, известными методами ([1], гл. 6, 7) можно точно оценить через ядро погрешность приближения и на классе $W^m H^\omega$:

$$\sup_{f \in W^m H^\omega} |f(t) - s_r(f, t)| = \int^{\beta_r - \alpha_r} \Phi[K_{r,m}(t, \cdot), u]\, \omega'(u)\, du, \tag{4}$$

где $\Phi[K_{r,m}(t, \cdot), u]$ — Σ-перестановка [1, с. 144] ядра $K_{r,m}(t, u)$ как функции от u. При r нечетном ядро $K_r(t, u)$ есть простая функция и в этом случае $\Phi[K_r(t, \cdot), u]$ совпадает с обычной убывающей перестановкой функции $|K_r(t, u)|$ по переменной u. Отметим, что интеграл в правой части (4) можно оценить сверху величиной $[\|K_{r,m}(t, \cdot)\|_1/(\beta_r - \alpha_r)]\,\omega(\beta_r - \alpha_r)$.

Продифференцировав равенство (3) по t, можно получить аналогичные оценки для $|f^{(\nu)}(t) - s_r^{(\nu)}(f, t)|$, $\nu = 1, 2, \ldots, r$. Для r нечетного при $m = r$ укажем еще неравенство

$$|f(t) - s_r(f, t)| \leqslant \max_u \Big| \sum_j K_r(t, u + jh) \Big|\, \omega(f^{(r)}, h),$$

не улучшаемое на всем множестве C^r.

Получение точных оценок с числовыми константами связано с определенными техническими трудностями, которые нарастают с увеличением r. Мы приведем здесь некоторые результаты для $r = 2$ и 3.

При $r = 2$ коэффициенты γ_i имеют следующие значения: $\gamma_{-1} = \gamma_1 = -1/8$, $\gamma_0 = 5/4$. Вычисляя $\max\limits_t \|K_2(t, \cdot)\|_p$ при $p = 1$ и ∞, приходим к соотношениям

$$\sup_{f \in W^3_\infty} \|f - s_2(f)\|_C = \frac{3}{64} h^3, \tag{5}$$

$$\sup_{f \in W^3_1} \|f - s_2(f)\|_C = \frac{9}{128} h^2, \quad \sup_{f \in W^2_\infty} \|f - s_2(f)\|_C = \frac{9}{32} h^2.$$

Равенство (5) равносильно тому факту, что для $f \in C^3$ имеет место неулучшаемая оценка

$$\|f - s_2(f)\|_C \leqslant \frac{3}{64} h^3 \|f'''\|_C.$$

Заметим, что в случае приближения интерполяционными сплайнами соответствующая константа, характеризующая и поперечник, равна 1/24. Для $f \in C^4$ погрешность $\|f - s_2(f)\|_C$ имеет, вообще говоря, порядок $O(h^3)$, однако в точках t_k и τ_k этот порядок выше, например,

$$|f(t_k) - s_2(f, t_k)| \leqslant \frac{3}{128} h^4 \|f^{(4)}\|_C.$$

В случае $r = 3$ точность на кубических многочленах обеспечивает коэффициенты $\gamma_{-1} = \gamma_1 = -1/6$, $\gamma_0 = 4/3$. Исследование экстремальных характеристик ядра $K_3(t, u)$ приводит к равенствам

$$\sup_{f \in W^4_\infty} \|f - s_3(f)\|_C = \frac{35}{1152} h^4, \tag{6}$$

$$\sup_{f \in W^4_1} \|f - s_3(f)\|_C = \frac{185}{6912} h^3, \quad \sup_{f \in W^3_\infty} \|f - s_3(f)\|_C = \frac{185}{3456} h^3.$$

Справедлива также точная оценка для $f \in C^3$

$$\|f - s_3(f)\|_C \leqslant \frac{19}{576} h^3 \omega(f^{(3)}, h).$$

Для интерполяционных кубических сплайнов константа в равенстве, аналогичном (6) (определяющая и поперечник), равна 5/384. Заметим, что приведенные в [4, с. 252], оценки погрешности на классах W^3_∞ и W^4_∞, полученные с помощью ЭВМ, с точностью до всех выписанных там знаков совпадают с точными.

Точные оценки погрешности приближения локальными сплайнами (2) можно выразить через погрешность на экстремальной функции, которую в ряде случаев нетрудно построить, учитывая общие свойства ядра $K_{r,m}(t, u)$. Например, положив для краткости $q = [N/2]$, имеем

$$\sup_{f \in W_\infty^{r+1}} \| f - s_r(f) \|_C = | s_r(f_r, \xi_r) |,$$

где

$$f_r(t) = \frac{|t - \xi_r|^{r+1}}{(r+1)!}, \quad \xi_r = \begin{cases} t_q, & r = 2, 4, 6, \ldots, \\ t_q + \frac{1}{2} h, & r = 3, 5, 7, \ldots . \end{cases}$$

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. В силу локальности ядра $K_{r,m}(t, u)$ в представлении (3) погрешность реагирует на поведение приближаемой функции лишь в некоторой окрестности точки t. Это позволяет учитывать разные ограничения на норму или модуль непрерывности производной $f^{(m)}(t)$ и даже — за счет выбора m — разную гладкость функции f на разных участках ее области определения.

2. Знак первой и второй производных сплайна (2) определяется довольно простыми соотношениями, содержащими значения функции $f(t)$ в соседних точках τ_k, так что по информации $\{f(\tau_k)\}$ легко (по крайней мере, при малых r) установить промежутки монотонности и выпуклости сплайна $s_r(f, t)$.

3. При увеличении r носитель ядра $K_{r,m}(t, u)$ расширяется и эффект локальности ослабевает. Наиболее важными с практической точки зрения являются, по-видимому, случаи $r = 2$ и 3.

4. Для локальных сплайнов минимального дефекта по произвольной сетке получение точных оценок даже при малых r значительно усложняется; порядковые оценки можно найти в [4, 5, 7].

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1976.— 320 с.
2. *Korneičuk N. P.* Exact error bound of approximation by interpolating splines in L-metric in the classes W_p^r $(1 \leqslant p < \infty)$ of periodic functions. — Anal. math., 1977, 3, № 2, p. 109—117.
3. *Golitschek M. V.* On n-widths and interpolation by polynomiale splines.— J. Approxim Theory, 1979, 26, № 2, p. 133—141.
4. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.—М. : Наука, 1980.— 352 с.
5. *Lych T., Schumaker L. L.* Local spline approximation methods.— J. Approxim. Theory, 1975, 15, № 4, p. 294—325.
6. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.— М. : Наука, 1976.— 248 с.
7. *Юферев В. С.* Локальная аппроксимация кубическими сплайнами.— Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1981, 21, № 1, с. 5—10.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
26.05.1981 г.