УДК 519,50:54

В. В. Маслов

Проективные пределы полусинтопогенных пространств

В статье дается определение проективного предела полусинтопогенных пространств. Терминология заимствована из [1, 2].

Определение 1. *Пусть $<$ — некоторый полутопогенный порядок на классе $X \neq \varnothing$. Между подклассами класса $\mathcal{P}(X)$ определим отношения $<_{\varkappa}$, $<_{\lambda}$, $<_{\psi}$ следующим образом:*

1) *$A <_{\varkappa} B$ тогда и только тогда, когда либо $A = B = \varnothing$, либо найдутся две такие части U, V класса X, что $U < V$, $A \subset \{(W) : W \subset U\}$, $\{(W) : W \subset V\} \subset B$;*

2) $A<_{\lambda}B$ *тогда и только тогда, когда либо* $A=B=\varnothing$, *либо найдутся две такие части* U, V *класса* X, *что* $U<V$, $A\subset\{(W):W\cap U\neq\varnothing\}$, $\{(W):W\cap V\neq\varnothing\}\subset B$;

3) $<_{\psi}=<_{\varkappa}\vee<_{\lambda}$.

Символ (A) обозначает элемент класса $\mathcal{P}(X)$, если $A\subset X$.

Предложение 1. *Каждое отношение* $<_{\varkappa}$, $<_{\lambda}$, и $<_{\psi}$ *является полутопогенным порядком на* $\mathcal{P}(X)$. *Если* S — *полусинтопогенная структура на классе* X, *то каждый из классов*

$$S_{\varkappa}=\{<_{\varkappa}:<\in S\},\ S_{\lambda}=\{<_{\lambda}:<\in S\},\ S_{\psi}=\{<_{\psi}:<\in S\}$$

является полусинтопогенной структурой на $\mathcal{P}(X)$.

Замечание. Полусинтопогенные пространства $[\mathcal{P}(X);\ S_{\varkappa}]$, $[\mathcal{P}(X);\ S_{\lambda}]$ и $[\mathcal{P}(X);\ S_{\psi}]$ называются гиперпространствами (для) пространства $[X;\ S]$. Если класс X отождествить с подклассом $\{(\{x\}):x\in X\}$ в $\mathcal{P}(X)$, то $S_{\varkappa}|X=S_{\lambda}|X=S_{\psi}|X=S$.

Определение 2. *Пусть* I — *некоторый предупорядоченный класс с отношением порядка, обозначаемым символом* $\prec$, $([X_i;\ S_i])_{i\in I}$ — *семейство полусинтопогенных пространств, и* f_{ij} *для всех* $(i;\ j)\in I\times I$ *таких, что* $i\prec j$ — отображение из X_j в X_i. Будем говорить, что $([X_i;\ S_i],\ f_{ij})$ *есть проективная система полусинтопогенных пространств, если выполнены следующие условия: 1)* $(X_i;\ f_{ij})$ — *проективная система классов; 2) все отображения* f_{ij} *являются* $(S_j;\ S_i)$-*непрерывными*.

Определение 3. *Пусть* $([X_i;\ S_i];\ f_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств,* $X=\varprojlim X_i$, *а* f_i — *каноническое отображение из* X *в* X_i *при всех* $i\in I$. *Полусинтопогенную структуру* $S=\bigvee_{i\in I}f_i^{-1}(S_i)$ *на классе* X *назовем проективным пределом полусинтопогенных структур* S_i, $i\in I$, *а полусинтопогенное пространство* $[X;\ S]$ — *проективным пределом проективной системы* $([X_i;\ S_i],\ f_{ij})$ *полусинтопогенных пространств.*

Будем обозначать $S=\varprojlim S_i$, $[X;\ S]=\varprojlim[X_i;\ S_i]$.

Предложение 1. *Структура* $\varprojlim S_i$ — *слабейшая среди полусинтопогенных структур на классе* $\varprojlim X_i$, *которые сильнее всех структур* $f_i^{-1}(S_i)$, $i\in I$.

Замечание. Как правило, от проективного предела классических структур требуется, чтобы получающаяся структура была того же типа, что и исходные. С этой точки зрения проективным пределом проективной системы $([X_i,\ S_i],\ f_{ij})$ топологических (соответственно близостных или равномерных) пространств называют топологические (соответственно, близостное или равномерное) пространство $[X;\ S^{qp}]$ (соответственно $[X;\ S^{s}]$ или $[X;\ S^{sb}]$).

Следствия 1. *Пусть* $([X_i;\ \{<_i\}],\ f_{ij})$ — *проективная система топологических пространств. Тогда* $(\varprojlim\{<_i\})^{qp}$ — *слабейшая из топологий на классе* $\varprojlim X_i$, *мажорирующих все топологии* $(f_i^{-1}(\{<_i\}))^{qp}$, $i\in I$.

2. *Пусть* $([X_i;\{<_i\}],\ f_{ij})$ — *проективная система пространств близости. Тогда* $(\varprojlim\{<_i\})^{s}$ — *слабейшая из близостных структур на классе* $\varprojlim X_i$, *мажорирующих все структуры близости* $(f_i^{-1}(\{<_i\}))^{s}$, $i\in I$.

3. *Пусть* $([X_i;\ S_i],\ f_{ij})$ — *проективная система равномерных пространств. Тогда* $(\varprojlim S_i)^{sp}$ — *слабейшая из равномерных структур на классе* $\varprojlim X_i$, *мажорирующих все равномерные структуры* $(f_i^{-1}(S_i))^{sp}$, $i\in I$.

4. *Пусть* $([X_i;\ S_i],\ f_{ij})$ — *проективная система равномерных пространств. Тогда* $([X_i;\ S_i^{ts}],\ f_{ij})$ — *проективная система пространств близости. При этом* $((\varprojlim s_i)^{sp})^{ts}=(\varprojlim S_i^{ts})^{s}$.

5. *Пусть* $([X_i; \{<_i\}], f_{ij})$ — *проективная система пространств близости. Тогда* $([X_i; \{<_i\}^p], f_{ij})$ — *проективная система топологических пространств. При этом*

$$(\varprojlim \{<_i\})^{sp} = (\varprojlim \{<_i\}^p)^{qp}.$$

6. *Пусть* $([X_i; S_i], f_{ij})$ — *проективная система равномерных пространств. Тогда* $([X_i; S_i^{tsp}], f_{ij})$ — *проективная система топологических пространств. При этом*

$$(\varprojlim S_i^{tsp})^{qp} = ((\varprojlim S_i^{ts})^s)^p = ((\varprojlim S_i)^{sp})^{tsp}.$$

Предложение 3. *Если* $([X_i; S_i], f_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств, то*

$$\varprojlim S_i = \prod_{i\in I} S_i \mid \varprojlim X_i.$$

В самом деле, $X \subset \prod\limits_{i\in I} X_i$, все отображения f_i — сужения проекций $pr_i: \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_i$, а $\prod\limits_{i\in I} S_i = \bigvee\limits_{i\in I} pr_i^{-1}(S_i)$.

Предложение 4. *Пусть* $([X_i; S_i], f_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств,* $Y_i \subset X_i$ *для всех* $i \in I$ *и* $g_{ij} = f_{ij} \mid Y_j$ *при* $(i; j) \in I \times I$. *Тогда* $([Y_i; S_i \mid Y_i]; g_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств (называемая проективной системой подпространств исходной проективной системы). При этом*

$$\varprojlim (S_i \mid Y_i) = \varprojlim S_i \mid \varprojlim Y_i.$$

При доказательстве предложения 4 используется следующая лемма.

Лемма. *Каковы бы ни были отображение* $f: M \to [X; S]$ *и часть* Y *класса* X, *всегда* $(f \mid Y)^{-1}(S \mid Y) = f^{-1}(S) \mid f^{-1}(Y)$.

Доказательство. Выберем произвольный полутопогенный порядок $< \in f^{-1}(S) \mid f^{-1}(Y)$. Тогда $< = <_1 \mid f^{-1}(Y)$, где $<_1 \in f^{-1}(S)$. Пусть $<_1 = f^{-1}(<_2)$ при $<_2 \in S$. Положим $<_3 = <_2 \mid Y$. Ясно, что $<_3 \in S \mid Y$. Наконец, полутопогенный порядок $<' = (f \mid Y)^{-1}(<_3)$ принадлежит структуре $(f \mid Y)^{-1}(S \mid Y)$. Покажем что $< = <'$.

Соотношение $A < B$, $A, B \subset f^{-1}(Y)$, эквивалентно соотношению $A <_1 B \cup (M \setminus f^{-1}(Y))$. Найдем части A_2, B_2 класса X так, чтобы $A_2 <_2 B_2$, $A \subset f^{-1}(A_2)$, $B \cup (M \setminus f^{-1}(Y)) \supset f^{-1}(B_2)$.

Отсюда $A_2 \cap Y <_3 B_2 \cap Y$ и $(f \mid Y)^{-1}(A_2 \cap Y) <' (f \mid Y)^{-1}(B_2 \cap Y)$. Из соотношений $A \subset f^{-1}(A_2)$, $A \subset f^{-1}(Y)$, $f^{-1}(A_2) \cap f^{-1}(Y) = (f \mid Y)^{-1}(A_2 \cap Y)$ получаем $A \subset (f \mid Y)^{-1}(A_2 \cap Y)$. Далее,

$$(f \mid Y)^{-1}(B_2 \cap Y) = f^{-1}(B_2) \cap f^{-1}(Y) \subset (B \cup (M \setminus f^{-1}(Y))) \cap f^{-1}(Y) = B.$$

Поэтому $A <' B$.

Обратно, пусть $U <' V$, так что найдутся такие части U_3, V_3 класса Y, что $U_3 <_3 V_3$, $U \subset (f \mid Y)^{-1}(U_3)$, $(f \mid Y)^{-1}(V_3) \subset V$. Тогда $U_3 <_2 V_3 \cup (X \setminus Y)$, $f^{-1}(U_3) <_1 f^{-1}(V_3 \cup (X \setminus Y))$, так что $f^{-1}(U_3) \cap f^{-1}(Y) < f^{-1}(V_3 \cup (X \setminus Y)) \cap f^{-1}(Y)$. Поскольку $A \subset (f \mid Y)^{-1}(U_3)$, то $A \subset f^{-1}(U_3) \cap f^{-1}(Y)$. Далее, $f^{-1}(V_3 \cup (X \setminus Y)) \cap f^{-1}(Y) = (f^{-1}(V_3) \cup f^{-1}(X \setminus Y)) \cap f^{-1}(Y) = (f^{-1}(V_3) \cap f^{-1}(Y)) \cup (f^{-1}(X \setminus Y) \cap f^{-1}(Y)) = (f \mid Y)^{-1}(V_3)$. Поэтому $U < V$.

Итак, показано включение $f^{-1}(S) \mid f^{-1}(Y) \subset (f \mid Y)^{-1}(S \mid Y)$. Обратное включение доказывается аналогично.

Предложение 5. *Допустим, что выполняются следующие условия:*

1) *задана проективная система полусинтопогенных пространств* $([X_i; S_i], f_{ij}, (i, j) \in I \times I$;

2) *задана проективная система полусинтопогенных пространств* $([X'_i; S'_i], f'_{ij})$, $(i, j) \in I \times I$;

3) *для каждого индекса* $i \in I$ *определено* $(S_i; S'_i)$*-непрерывное отображение* $u_i : X_i \to X_i^l$ *так, что эти две проективные системы полусинтопогенных пространств образуют проективную систему отображений. Тогда оказывается, что отображение* $u = \varprojlim u_i$ — $(\varprojlim S_i;\ \varprojlim S'_i)$*-непрерывно.*

Доказательство. Выберем произвольный полутопогенный порядок $<' \in \varprojlim S'_i$. По определению структуры $\varprojlim S'_i$ существуют такая конечная часть J класса I, а для каждого индекса $i \in J$ — полутопогенный порядок $<'_i \in S'_i$, что $<' = \bigcup_{i \in J} f_i'^{-1}(<'_i)$. Пусть порядок $<_i \in S_i$ мажорирует порядок $u_i^{-1}(<'_i)$, $i \in J$. Тогда $< = \bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(<_i)$ — полутопогенный порядок из структуры $\varprojlim S_i$.

Если $A <' B$, то $A f_{i_0}'^{-1}(<'_{i_0}) B$ — хотя бы для одного индекса $i_0 \in J$, так что найдутся такие части A_{i_0}, B_{i_0} класса X'_{i_0}, что $A_{i_0} <'_{i_0} B_{i_0}$, $A \subset f_{i_0}'^{-1}(A_{i_0})$, $f_{i_0}'^{-1}(B_{i_0}) \subset B$. Первое из записанных соотношений влечет сначала соотношение $u_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) <_{i_0} u_{i_0}^{-1}(B_{i_0})$, а затем — соотношение $f_{i_0}^{-1}(u_{i_0}^{-1}(A_{i_0})) < f_{i_0}^{-1}(u_{i_0}^{-1}(B_{i_0}))$. Используя равенство $f'_i \circ u = u_i \circ f_i$, справедливое для всех индексов $i \in I$, находим $u^{-1}(f_{i_0}'^{-1}(A_{i_0})) < u^{-1}(f_{i_0}'^{-1}(B_{i_0}))$. Следовательно, $u^{-1}(A) < u^{-1}(B)$.

Предложение 6. *Если* $([X_i; S_i], f_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств, то* $([\mathcal{P}(X_i); S_i^*], \hat{f}_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств. Символ* S^* *обозначает здесь одну из структур* $S_\varkappa$, S_λ *или* S_ψ.

Доказательство тривиально.

Предложение 7. *Пусть* $([X_i; S_i], f_{ij})$ — *проективная система полусинтопогенных пространств. Тогда существует биективное отображение* $\varphi : \mathcal{P}(\varprojlim X_i) \to \varprojlim \mathcal{P}(X_i)$, *являющееся* $((\varprojlim S_i)^*;\ \varprojlim S_i^*)$*-непрерывным. Здесь, как и в предыдущем предложении, символ* S^* *обозначает одну из структур* $S_\varkappa$, S_λ *или* S_ψ.

Доказательство. Пусть $f_i : \varprojlim X_i \to X_i$ и $g_i : \varprojlim \mathcal{P}(X_i) \to \mathcal{P}(X_i)$ — канонические отображения. Отображение $\hat{f}_i : \mathcal{P}(\varprojlim X_i) \to \mathcal{P}(X_i)$ — гиперпродолжение отображения f_i, и, как легко проверить, удовлетворяет соотношению $\hat{f}_i = \hat{f}_{ij} \circ \hat{f}_j$ при всех $(i, j) \in I \times I$. Кроме того, все отображения $\hat{f}_i$, $i \in I$, — $((\varprojlim S_i)^*;\ S_i^*)$-непрерывны. Пусть $(M) \in \mathcal{P}(\varprojlim X_i)$, так что $M \subset \varprojlim X_i$, а потому $f_i(M) \subset X_i$ $i \in I$, т. е. $(f_i(M)) \in \mathcal{P}(X_i)$, $i \in I$. Можно показать, что $g_i^{-1}((f_i(M)))$ есть один и тот же элемент класса $\varprojlim \mathcal{P}(X_i)$ при всех $i \in I$, сопоставив который с элементом (M), мы и получим биективное отображение φ. Выберем произвольный полутопогенный порядок $< \in \varprojlim S_i^*$; тогда найдутся конечная часть J класса I и для каждого $i \in J$ — полутопогенный порядок $<_i^* \in S_i^*$, так что $< = \bigcup_{i \in J} g_i^{-1}(<_i^*)$. Если $<_i$, $i \in J$, — тот полутопогенный порядок в структуре S_i, который определяет порядок $<_i^*$, то

$$\bigcup_{i \in J} f_i^{-1}(<_i) = <' \in \varprojlim S_i.$$

Наконец, пусть $<'^* \in (\varprojlim S_i)^*$. Покажем, что полутопогенный порядок $<'^*$ мажорирует полутопогенный порядок $\varphi^{-1}(<)$. Но это—просто.

В частном случае предложение 7 допускает следующее усиление.

П р е д л о ж е н и е 8. *Отображение* φ, *определенное в предположении 7, есть изоморфизм пространства* $[\mathcal{P}(\underleftarrow{\lim} X_i);\ (\underleftarrow{\lim} S_i)_\lambda]$ *на пространство* $[\underleftarrow{\lim}\, \mathcal{P}(X_i);\ \underleftarrow{\lim}\, (S_i)_\lambda]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что отображение φ $((\underleftarrow{\lim} S_i)_\lambda;\ \underleftarrow{\lim}\,(S_i)_\lambda)$ открыто.

Каждый полутопогенный порядок $<_\lambda \in (\underleftarrow{\lim} S_i)_\lambda$ определяется полутопогенным порядком $< \in \underleftarrow{\lim} S_i$, который представим в виде $\bigcup\limits_{i \in J} f_i^{-1}(<_i)$, где $<_i \in S_i$, J — конечная часть класса I. Тогда $(<_i)_\lambda \in (S_i)_\lambda$, $i \in J$, и $\bigcup\limits_{i \in J} g_i^{-1}((<_i)_\lambda) = <' \in \underleftarrow{\lim}\,(S_i)_\lambda$.

Покажем, что если $A^* <_\lambda B^*$, то $\varphi(A^*) <' \varphi(B^*)$.

Соотношение $A^* <_\lambda B^*$ равносильно существованию таких частей A, B класса $\underleftarrow{\lim} X_i$, что $A < B$, $A^* \subset \{(W) : W \cap A \neq \varnothing\}$, $\{(W) : W \cap B \neq \varnothing\} \subset B^*$.

Пусть $i_0 \in J$ — тот индекс, для которого справедливо соотношение $A f_{i_0}^{-1}(<_{i_0}) B$. Найдем такие части A_{i_0}, B_{i_0} класса X_{i_0}, что $A_{i_0} <_{i_0} B_{i_0}$, $A \subset f_{i_0}^{-1}(A_{i_0})$, $f_{i_0}^{-1}(B_{i_0}) \subset B$. Если положить $A_{i_0}^* = \{(W) : W \cap A_{i_0} \neq \varnothing\}$, $B_{i_0}^* = \{(W) : W \cap B_{i_0} \neq \varnothing\}$, то $A_{i_0}^* (<_{i_0})_\lambda B_{i_0}^*$. Отсюда $g_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^*) <' g_{i_0}^{-1}(B_{i_0}^*)$. Считая теперь $t \in \varphi(A)$, найдем $z \in A^*$ такое, чтобы $t = \varphi(z)$. Так как $z \in A^*$, то $z = (W)$ и $W \cap A \neq \varnothing$. Поэтому $W \cap f_{i_0}^{-1}(A_{i_0}) \neq \varnothing$. Отсюда $f_{i_0}(W) \cap f_{i_0}(f_{i_0}^{-1}(A_{i_0})) \neq \varnothing$. Поскольку $f(f_{i_0}^{-1}(A_{i_0})) \subset A_{i_0}$, то $f_{i_0}(W) \cap A_{i_0} \neq \varnothing$. Следовательно, $(f_{i_0}(W)) \in A_{i_0}^*$ и $t = g_{i_0}^{-1}((f_{i_0}(W))) \in g_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^*)$. Итак, $\varphi(A) \subset g_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^*)$.

Далее, если $t \in g_{i_0}^{-1}(B_{i_0}^*)$, то $g_{i_0}(t) \in B_{i_0}$, так что $g_{i_0}(t) \cap B_{i_0} \neq \varnothing$. Отсюда

$$\varnothing \neq f_{i_0}^{-1}(g_{i_0}(t) \cap B_{i_0}) = f_{i_0}^{-1}(g_{i_0}(t)) \cap f_{i_0}^{-1}(B_{i_0}).$$

Тем более $f_{i_0}^{-1}(g_{i_0}(t)) \cap B \neq \varnothing$. Поэтому $f_{i_0}^{-1}(g_{i_0}(t)) \in B^*$, т. е. $\varphi(f_{i_0}^{-1}(g_{i_0}(t))) \in \varphi(B)$. Следовательно, $t \in \varphi(B)$. Итак, $g_{i_0}^{-1}(B_{i_0}^*) \subset \varphi(B)$.

Наконец, из соотношений $\varphi(A^*) \subset g_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^*)$, $\varphi(B^*) \supset g_{i_0}^{-1}(B_{i_0}^*)$ и $g_{i_0}^{-1}(A_{i_0}^*) <' g_{i_0}^{-1}(B_{i_0})$ следует, что $\varphi(A^*) <' \varphi(B^*)$.

1. *Маслов В. В.* Полусинтопогенные пространства.— Учен. зап. Моск. пед. ин-та им. В. И. Ленина, 1970, № 277, с. 129—143.
2. *Császár A.* Grundlagen der allgemeinen Topologie.— Budapest : Akad. Kiadó, 1963.— 262 S.

Ворошиловградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.02.1979 г.