УДК 517.946

И. Д. Пукальский, М. И. Матийчук

О решении параболической граничной задачи с особенностями в коэффициентах краевого оператора

С помощью априорных оценок и метода теории потенциала будем решать общую неоднородную задачу с особенностями в коэффициентах краевых операторов.

Постановка граничной задачи и основной результат. Пусть Ω — ограниченная выпуклая область в E_n с границей S. Рассмотрим в области $Q = (0, T) \times \Theta$ краевую задачу

$$L(D)\,u \equiv D_t u - \sum_{|j| \leqslant 2b} A_j(t, x)\, D_x^j u = f(t, x); \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \tag{2}$$

$$\sum_{m=0}^{r_i} B_m^{(i)}(z, D)\, u(t, z) \equiv \sum_{m=0}^{r_i} \sum_{|k|=m} b_k^{(i)}(t, x)\, D_x^k u|_\Gamma = g_i(t, z), \tag{3}$$

где $\Gamma = (0, T) \times S$; $1 \leqslant r_i \leqslant 2b - 1$; $i = 1, \ldots, bN$.

Предполагаем, что выполнены следующие условия.

1. Краевая задача (1) — (3) параболическая [1] и $A_j(t, x) \in C^{l+\alpha}(Q)$, $b_k^{(i)}(t, x) \in C^{2b-r_i+l+\alpha}(\Gamma)$ при $|k| \geqslant r \equiv \min\limits_i r_i$, $S \in C^{2b+l+\alpha}$.

2. При $|k| < r$ $|D_z^{s_i} b_k^{(i)}(t, z)| \leqslant c\,|z - z^0|^{-\alpha_{ki} - |s_i|}$,

$$|\Delta_x^h D_z^{s_i} b_k^{(i)}(t, z)| \leqslant c\,|h|^\alpha\, |\tilde{z} - z^0|^{-\alpha_{ki} - |s_i| - \alpha}, \quad z \in S,\ z^0 \in S,$$

$$|\Delta_t^h b_k^{(i)}(t, z)| \leqslant c\,|h|^{\frac{2b - r_i + \alpha}{2b}}\, |z - z^0|^{-\alpha_{ki}}, \quad |s_i| = 2b - r_i,$$

где $|\tilde{z} - z^0| = \min(|z - z^0|, |z + h - z^0|)$, $\quad 0 \leqslant \alpha_{ki} < \min(r - |k|, n - 1)$.

Пусть $\overline{Q} = [0, T) \times \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$ $N_1(t^{(1)}, x^{(2)})$ и $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$ — любые точки из Q,

$$d(P_1, P_2) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)})^2 + |t^{(1)} - t^{(2)}|^{1/b}\right]^{1/2}, \quad d_{P_1} = \min_{P \in S} d(P_1, P),$$

$$d_{P_1 P_2} = \min(d_{P_1}, d_{P_2}), \quad \gamma = \max_{k, i}\left(\frac{2b - r_i + \alpha_{ki}}{2b - |k|}\right), \quad |k| < r, \quad i = 1, \ldots, bN.$$

Обозначим через $C_{m,\gamma}^{R+\alpha}(Q)$ пространство непрерывных функций $u(t, x)$ в $\overline{Q}$, имеющих в $\overline{Q} \diagdown (t, z^0)$ непрерывные производные вида $D_t^k D_x^j u$ при $2bk + |j| \leqslant R$ и с конечной нормой

$$|u|_{m,\gamma}^{R+\alpha} = \sum_{2bk+|j| \leqslant R} \sup_{P \in Q} [\,|x - z^0|^{(m+|j|+2bk)\gamma}\, d_P^{m+|j|+2bk}\, |D_t^k D_x^j u(P)|\,] +$$

$$+ \sum_{2bk+|j|=R} \sup_{N_1, P_1 \in Q} [\,|\tilde{x} - z^0|^\gamma d_{N_1 P_1}]^{m+R+\alpha}\, |x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\alpha}\, |D_t^k D_x^j u(P_1) -$$

$$- D_t^k D_x^j u(N_1)| + \sum_{0 < R+\alpha-2bk-|j| < 2b} \sup_{N_1, P_2 \in Q} [\,|x^{(2)} - z^0|^\gamma d_{N_1 P_2}]^{m+R+\alpha} \times$$

$$\times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{R+\alpha-2bk-|j|}{2b}}\, |D_t^k D_x^j u(N_1) - D_t^k D_x^j u(P_2)|.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема о корректности. *Предположим, что выполнены условия 1), 2),* $l = 4b - 2r + 1$, $g_i(t, z) \in C_{a_i,\gamma}^{2b-r_i+\alpha}(\Gamma)$, $\quad \varphi(x) \in C_{0,\gamma}^{2b+\alpha}(\Omega)$, $f(t, x) \in$

$\in C^{\alpha}_{a,\gamma}(Q)$, $\sum\limits_{m=0}^{r_i} B^{(i)}_m(z, D)\,\varphi(z) = g_i(0, z)$. *Тогда в задаче (1) — (3) существует функция Грина* $(G_0, G_1, \ldots, G_{bN})$ *такая, что единственное решение* $u(t, x)$ *из класса* $C^{2b+\alpha}_{0,\gamma}(Q)$ *определяется формулой*

$$u(t, x) = \int\limits_{\Omega} G_0(t, 0, x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\Omega} G_0(t, \tau, x, \xi)\,f(\tau, \xi)\,d\xi +$$

$$+ \sum_{i=1}^{bN} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S} G_i(t, \tau, x, \xi)\,g_i(\tau, \xi)\,d_\xi S \equiv G_0 * \varphi + G_0 ** f + \vec{G} * \vec{g}. \quad (4)$$

Для $u(t, x)$ справедлива оценка

$$|u|^{2b+\alpha}_{0,\gamma} \leqslant c\,(|f|^{\alpha}_{a,\gamma} + |\varphi|^{2b+\alpha}_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{bN} |g_i|^{2b-r_i+\alpha}_{a_i,\gamma}), \quad (5)$$

c зависит от α, $\operatorname{mes} Q$ и нормы коэффициентов системы $a \equiv \min(2b, n)$, $a_i \equiv \min(r_i, n-1)$.

Р е ш е н и е к р а е в о й з а д а ч и. Сформулируем используемую в дальнейшем лемму.

Л е м м а. *Если в условии 1)* $l \geqslant 0$, *для данных задачи выполняются условия теоремы и* $u(t; x)$ — *решение задачи (1) — (3) из класса* $C^{2b+d}_{0,\gamma}(Q)$, *то*

$$|u|^{2b+\alpha}_{0,\gamma} \leqslant c\left(|f|^{\alpha}_{a,\gamma} + |\varphi|^{2b+\alpha}_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{bN} |g_i|^{2b-r_i+\alpha}_{a_i,\gamma} + \sup_{\overline{Q}} |u|\right). \quad (6)$$

Вывод неравенства (6) для решений задачи 1) — 3) из $C^{2b+\alpha}_{0,\gamma}(Q)$ проводится с помощью развитой в работах [2, 5] методики.

Изложим наиболее существенные моменты доказательства теоремы. Рассмотрим следующие краевые задачи:

$$L(D)\,u_p = f(t, x), \quad p = r, r-1, \ldots, 1, 0; \quad (7)$$

$$u_p|_{t=0} = \varphi(x); \quad (8)$$

$$\sum_{m=p}^{r_i} B^{(i)}_m(z, D)\,u_p(t, z) = g_i(t, z) + \operatorname{sngp} \times \sum_{m=0}^{p} B^{(i)}_m(z, D)\,\varphi(z) \equiv g^{(p)}_i(t, z). \quad (9)$$

Покажем, что, последовательно полагая $p = r, r-1, \ldots, 1, 0$, можно однозначно определить функции $u_r, \ldots, u_0$. Тогда, очевидно, $u_0 \equiv u$ — решение исходной задачи.

В силу того, что коэффициенты задачи (7)—(9) при $p=r$ ограничены, на основании теоремы 1.1 из [3], ее решение можно представить в виде

$$u_r(t, x) = G^{(r)}_0 * \varphi + G^{(r)}_0 ** f + \vec{G}^{(r)} * \vec{g}^{(r)}, \quad (10)$$

где $(C^{(r)}_0, \vec{G}^{(r)})$ — функция Грина краевой задачи (7) — (9) при $p = r$. Для $u_r(t, x)$ при $|k| < r$ имеет место оценка

$$|D^k_x u_r| \leqslant c\left(|f|_C t^{\frac{2b-|k|}{2b}} + |\varphi|^{r+|k|}_{0,\gamma} + \sum_{i=1}^{bN} |g^{(r)}_i|_C t^{\frac{r_i-|k|}{2b}}\right).$$

Запишем краевые условия (9) в виде

$$\sum_{m=p+1}^{r_i} B^{(i)}_m(z, D)\,u_p(t, z) = -B^{(i)}_p(z, D)\,u_p(t, z) + g^{(p)}_i(t, z). \quad (11)$$

Для определения u_{r-1}, с помощью функции Грина задачи (7)—(9) при $p = r$ и с учетом (11), поставим в соответствие задачи (7)—(9) при $p = r-1$

эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{r-1}(t,x)=u_r(t,x)-\sum_{i=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_S G_i^{(r)}(t,\tau,x,\xi)\,B_{r-1}^{(i)}(\xi,D)\,u_{r-1}(\tau,\xi)\,d_\xi S. \qquad (12)$$

Применяя оператор D_x^k, $|K|=r-1$, к соотношению (12), получаем систему интегральных уравнений

$$D_x^k u_{r-1}(t,x)=D_x^k u_r(t,x)+\sum_{|m|=r-1}\int_0^t d\tau\int_S K_{k,m}^{(r-1)}(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times\, b_m^{(i)}(\tau,\xi)\,D_\xi^m u(\tau,\xi)\,d_\xi S,\quad |k|=r-1,\quad x\in\overline{\Omega}, \qquad (13)$$

где

$$|K_{k,m}^{(r-1)}(t,x,\tau,\xi)|\equiv\left|-\sum_{i=1}^{bN}D_x^k G_i^{(r)}(t,\tau,x,\xi)\,b_m^{(i)}(\tau,\xi)\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\sum_{i=1}^{bN}\Phi_{i,r-1}^{(c)}(t-\tau,x-\xi)\,|\xi-z^0|^{-\alpha_{mi}}, \qquad (14)$$

$$\Phi_{i,|k|}^{(c_2)}(t,x)=t^{-\frac{n+2b-r_i-1+|k|}{2b}}\exp\{-c_2(|x|\times t^{1/2b})^{\frac{2b}{2b-1}}\}.$$

Используя методику работы [4] и оценку

$$\int_\tau^t d\beta\int_S F_\varepsilon^{(c)}(t-\beta,x-y)\,|y-z^0|^{-\delta}F_\mu^{(c)}(\beta-\tau,y-\xi)\,d_yS\leqslant$$

$$\leqslant cF_{\mu+\varepsilon+\delta+1-2b}^{(c_1)}(t-\tau,x-\xi), \qquad (15)$$

$$F_\varepsilon^{(c)}(t,x)=\Phi_{i,\varepsilon}^{(c)}(t,x)\times t^{\frac{2b-r_i-1}{2b}},\quad z^0\in S,\quad z,\xi\in S,\quad S\in C^{(1)},\quad \mu+\delta<2b-1,$$

$$\varepsilon+\delta<2b-1,\quad 0<c_1<c,$$

находим решение системы (13)

$$D_x^k u_{r-1}(t,x)=D_x^k u_r(t,x)+\sum_{|m|=r-1}\int_0^t d\tau\int_S R_{k,m}^{(r-1)}(t,\tau,x,\xi)\,D_x^m u_r(\tau,\xi)\,d_\xi S. \qquad (16)$$

Для $R_{k,m}^{(r-1)}(t,\tau,x,\xi)$ справедлива оценка

$$|R_{k,m}^{(r-1)}(t,\tau,x,\xi)|\leqslant c\sum_{i=1}^{bN}\Phi_{i,r-1}^{(c)}(t-\tau,x-\xi)\,|\xi-z^0|^{-\alpha_{mi}}. \qquad (17)$$

Вывод неравенства (15) аналогичен доказательству леммы 1 из [4].

Подставляя (16) в (12) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$u_{r-1}=G_0^{(r-1)}*\varphi+G_0^{(r-1)}**f+\vec{G}^{(r-1)}*\vec{g}^{(r-1)}, \qquad (18)$$

где

$$G_j^{(r-1)}=G_j^{(r)}+\vec{G}^{(r)}*\vec{\psi}^{j,r-1},\quad j=0,1,\ldots,bN,$$

$$\psi_i^{j,r-1}\equiv-B_{r-1}^{(i)}(z,D)\,G_j^{(r)}-\sum_{|m|,|k|=r-1}b_m^{(i)}R_{k,m}^{(r-1)}*D^mG_j^{(r)},$$

$$|\psi_i^{j,r-1}|\leqslant c\Phi_{j,r-1}^{(c)}(t-\tau,z-\xi)\sum_{|m|=r-1}|z-z^0|^{-\alpha_{mi}}.$$

Учитывая теорему 1.1 из [3], условие (2) и оценки (15), (17), имеем

$$|D_x^kG_i^{(r-1)}|\leqslant|D_x^kG_i^{(r)}|+\sum_{j=1}^{bN}\int_\tau^t d\beta\int_S\Phi_{j,|k|}^{(c)}(t-\beta,x-y)\times$$

$$\times\,\Phi_{i,r-1}^{(c)}(\beta-\tau,y-\xi)\sum_{|m|=r-1}|y-z^0|^{-\alpha_{mi}}d_yS\leqslant c\Phi_{i,|k|}^{(c)}(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times\left[1+\sum_{j=1}^{bN}\sum_{|m|=r-1}(t-\tau)^{\frac{r_j-r+1-\alpha_{mi}}{2b}}\right]\leqslant c\Phi^{(c)}_{i,|k|}(t-\tau, x-\xi).$$

Аналогично получаем неравенство $|D^k_x G^{(r-1)}_0|\leqslant cF^{(c)}_{|k|}(t-\tau, x-\xi)$.

Продолжая поиск функций $u_{r-2}, \ldots, u_0$, получаем следующую закономерность: функции u_p в силу условия (11) удовлетворяют уравнению

$$u_p(t, x) = u_{p+1}(t, x) - \sum_{i=1}^{bN}\int_0^t d\tau\int_S G^{(p+1)}_i(t, \tau, x, \xi)\, B^{(i)}_p(\xi, D)\, u_p(\tau, \xi)\, d_\xi S,$$

решение которого представимо в виде $u_p = G^{(p)}_0 * \varphi + G^{(p)}_0 ** f + \vec{G}^{(p)} * \vec{g}^{(p)}$,

где
$$G^{(p)}_j = G^{(p+1)}_j + \vec{G}^{(p+1)} * \vec{\psi}^{j,p}, \qquad j = 0, 1, \ldots, bN; \tag{19}$$

$$|\psi^{j,p}_i|\leqslant c\Phi^{(c)}_{j,|p|}(t-\tau, z-\xi)\sum_{|m|=p}|z-z^0|^{-\alpha_{mi}}. \tag{20}$$

Для функций $(G^{(p)}_0, \ldots, G^{(p)}_{bN})$ при $|k|\leqslant p$ справедливы оценки

$$|D^k_x G^{(p)}_0|\leqslant cF^{(c)}_{|k|}(t-\tau, x-\xi)\,|D^k_x G^{(p)}_i|\leqslant c\Phi^{(c)}_{i,|k|}(t-\tau, x-\xi), \quad i = 1, \ldots, bN. \tag{21}$$

Используя рекуррентные соотношения (19), выпишем компоненты функции $(G^{(0)}_0, \vec{G}^{(0)})\equiv(G_0, \vec{G})$ через $(G^{(r)}_0, \vec{G}^{(r)}\vec{\psi})^{j,p}$, $j = 0, 1, \ldots, bN$, $p = r-$ $-1, \ldots, 1, 0$. Имеем

$$G_j \equiv G^{(1)}_j + \sum_{i=1}^{bN} G^{(1)}_i * \psi^{j,0}_i \equiv G^{(2)}_j + \sum_{i=1}^{bN} G^{(2)}_i * \Big[\psi^{j,1}_i + \psi^{j,0}_i +$$

$$+\psi^{j,1}_i * \sum_{k=1}^{bN}\psi^{k,0}_i\Big] \equiv \ldots \equiv G^{(r)}_j + \sum_{i=1}^{bN} G^{(r)}_i * \Big[\sum_{p=0}^{r-1}\psi^{j,0}_i + \ldots + \psi^{j,p}_i * \ldots$$

$$\ldots * \sum_{k=1}^{bN}\psi^{k,0}_i\Big] \equiv G^{(r)}_j + \sum_{i=1}^{bN} G^{(r)}_i * M^{j,r}_i,$$

где $M^{j,r}_i$ — сумма всевозможных сверток из функций $\psi^{j,p}_i$, $j = 0, \ldots, bN$; $i = 1, \ldots, bN$; $p = 0, \ldots, r-1$.

В силу условия $\alpha_{ki} < \min(r-|k|, n-1)$, $|k| < r$, и оценок (15), (20)

$$|M^{j,r}_i|\leqslant c\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{|m|=p}|z-z^0|^{-\alpha_{mi}}\Phi^{(c)}_{j,p}(t-\tau, z-\xi).$$

Учитывая оценки (21) при $p = 0$, имеем

$$\sup_{\bar{Q}}|u|\leqslant c\left(|\varphi|_C + |f|_C + \sum_{i=1}^{bN}|g_i|_C\right). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (6), получаем неравенство (5).

1. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических дифференциальных уравнений общего вида.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1965, 83, с. 3—162.
2. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.
3. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина общих неоднородных граничных задач для параболических по И. Г. Петровскому систем.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978.— 52 с.
4. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. I.— Дифференц. уравнения, 1974, 10, № 8, с. 1463—1476.
5. *Матийчук М. И.; Пукальский И. Д.* Задача с косой производной для вырождающегося параболического уравнения.— Мат. заметки, 1980, 28, вып. 4, с. 533—544.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
19.01 1981 г.