УДК 517.948:513.77+519.4

В. Г. Самойленко

О самосопряжении эллиптического оператора второго порядка с бесконечным числом переменных

В статье исследуется вопрос о существенной самосопряженности общего эллиптического оператора второго порядка с постоянными старшими коэффициентами и бесконечным числом переменных, который непосредственно примыкает к проблемам, рассматриваемым в работах [1—3] для бесконечномерного оператора типа Шредингера и является их естественным продолжением. Интерес к изучению подобного класса операторов стимулируется задачами конструктивной теории поля.

Пусть в соответствии с [4] на пространстве $\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^1 \times \ldots$ точек $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \in \mathbf{R}^1$, $n = 1, 2, \ldots$, определена гауссовская продакт-мера $dg_\varepsilon(x) = (\gamma_1(x_1)\,dx_1) \otimes (\gamma_2(x_2)\,dx_2) \otimes \ldots$, где $\gamma_n(x_n) = \sqrt{\varepsilon_n \pi^{-1}}\, e^{-\varepsilon_n x_n^2}$, $\varepsilon_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $\sum\limits_{n=1}^\infty \varepsilon_n < \infty$, и построено пространство $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$.

Согласно теореме Колмогорова—Хинчина [5] для произвольной последовательности положительных чисел δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\sum\limits_{n=1}^\infty \delta_n < \infty$, множество $G = \left\{ x \in \mathbf{R}^\infty \mid \langle x \rangle^2 = \sum\limits_{n=1}^\infty \delta_n \varepsilon_n x_n^2 < \infty \right\}$ имеет полную dg_ε-меру. Ниже $G_r = \{x \in \mathbf{R}^\infty \mid \langle x \rangle \leqslant r\}$.

Положим $(D_n u)(x) = \gamma_n^{-1/2}(x_n) \dfrac{\partial}{\partial x_n} (\gamma_n^{1/2}(x_n)\, u)(x)$ и рассмотрим дифференциальное выражение

$$(L_0 u)(x) = -\sum_{j,k=1}^\infty a_{jk} (D_j (D_k u))(x) + u(x) \sum_{j,k=1}^\infty a_{jk} (D_j (D_k 1)).$$

Относительно старших коэффициентов $a_{jk} \in \mathbf{R}^1$, $j, k, = 1, 2, \ldots$, будем предполагать, что для произвольной финитной последовательности $(\xi_j)_{j=1}^\infty$, $\xi_j \in \mathbf{C}^1$, $j = 1, 2, \ldots$, справедливо соотношение

$$\sigma \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^\infty a_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k \leqslant c \sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^2 \tag{1}$$

при некоторых фиксированных $\sigma, c > 0$. В силу правой оценки из (1) в пространстве $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$ корректно определен эрмитовый оператор $C_{0,\text{ц}}^\infty(\mathbf{R}^\infty) \ni u(x) \to A_0 u = (L_0 u)(x) \in L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$ ($C_{0,\text{ц}}^\infty(\mathbf{R}^\infty)$ — линейная оболочка цилиндрических финитных бесконечно дифференцируемых функций $u(x) = u_\text{ц}(x_1, \ldots, x_p)$, где $u_\text{ц} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^p)$, $p = p(u)$).

Существенная самосопряженность оператора A_0 — не простое следствие общих соображений, так как L_0 не является выражением с разделяющимися переменными.

Т е о р е м а 1. *Пусть равномерно по* n

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=n+1}^\infty a_{jk}^2 \leqslant c < \infty, \tag{2}$$

тогда оператор A_0 *существенно самосопряжен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого факта основано на использовании эволюционных уравнений гиперболического типа и проводится подобно тому, как это сделано в работе [6]. Отметим, что условие (2) используется при получении равномерных оценок норм решений соответствующих задач Коши для гиперболических уравнений в $\mathbf{R}^n = 1, 2, \ldots$.

Результат, аналогичный теореме 1, можно получить и из теоремы 2 [7] или 1.3 гл. 3 [4]. Но, так как эти теоремы гарантируют существенную самосопряженность оператора на более широком множестве $D \supset C_{0,\text{ц}}^\infty(\mathbf{R}^\infty)$, доказательство заключается в проверке включения $D \subseteq ((A_0 \upharpoonright C_{0,\text{ц}}^\infty(\mathbf{R}^\infty)))$. Поскольку исследуемый оператор задается выражением с неразделяющимися переменными, эта проверка связана с техническими трудностями, для преодоления которых приходится накладывать ограничения на коэффициенты a_{jk}.

Отметим, что в случае оператора A_0 с разделяющимися переменными переход от D к $C^\infty_{0,\text{ц}}(\mathbf{R}^\infty)$ осуществляется без ограничений на коэффициенты, подобно тому, как это сделано в [2].

Рассмотрим оператор $C^\infty_{0,\text{ц}}(\mathbf{R}^\infty) \ni u(x) \to Au = (Lu)(x)$, где $(Lu)(x) = (L_0u)(x) + q(x)u(x)$, а $q(x)$—вещественнозначная функция из $L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$.

Теорема 2. *Пусть потенциал $q(x)$ полуограничен снизу. Если условие* (2) *выполняется, то оператор A существенно самосопряжен.*

Результат этой теоремы для оператора L, порожденного выражением L на области определения $D = D(\tilde{A}_0) \cap L_\infty$ ($\tilde{A}_0$ — замыкание оператора A_0), следует из общих теорем. Поэтому доказательство заключается в том, чтобы показать справедливость включения $D \subseteq D(\tilde{A})$. В этой части доказательства используется условие (2).

Пусть потенциал $q(x)$ в выражении L принадлежит

$$L_{2,\text{loc}}(\mathbf{R}^m) \otimes L_2(\mathbf{R}^\infty, (\gamma_{m+1}(x_{m+1})\, dx_{m+1}) \otimes (\gamma_{m+2}(x_{m+2})\, dx_{m+2}) \otimes \ldots)$$

при некотором фиксированном $m > 0$. Рассмотрим оператор $C^\infty_{0,\text{ц},m}(\mathbf{R}^\infty) \ni u(x) \to Au = (Lu)(x) \in L_2(\mathbf{R}^\infty, dg_\varepsilon(x))$, где $C^\infty_{0,\text{ц},m}(\mathbf{R}^\infty)$ — линейная оболочка цилиндрических функций $u(x) = u_\text{ц}(x_1, \ldots, x_p) \in C^\infty_0(\mathbf{R}^p)$, $p = p(u) \geqslant m$. Понятно, что он корректно определен.

Следующий результат устанавливается объединением гиперболического и параболического подходов подобно тому, как это сделано в [1—3], и обобщает теоремы 4 и 5 соответственно из [1] и [2].

Теорема 3. *Пусть коэффициенты a_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию* (2) *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| (\delta_k \varepsilon_k)^{1/2} \right)^2 < \infty,$$

а потенциал $q(x)$ локально полуограничен снизу в том смысле, что для каждого $r > 0$ $\inf\limits_{x \in G_r} q(x) > -\infty$. Оператор A будет существенно самосопряжен, если выполняется одно из двух условий: а) оператор A полуограничен снизу; б) существует невозрастающая функция $[0, \infty) \ni t \to Q(t) \in (-\infty, 0]$ такая, что $q(x) \geqslant Q(\langle x \rangle)$ и $|Q(t)|_{t\to\infty} = O(t^2)$.

Замечания. Теорема 3 обобщает соответствующий результат из [3] в том смысле, что матрица $A = (a_{jk})^\infty_{j,k=1}$ здесь может быть полностью заполнена отличными от нуля элементами. Это обстоятельство значительно осложняет доказательство теорем 2 и 3.

Условие (2) может быть ослаблено; его можно заменить равенством $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} a^2_{ij}\varepsilon_j = 0.$

Пусть $\delta_n \geqslant \varepsilon_n$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда результат теоремы 3 справедлив для оператора A, заданного на $C^\infty_{0,\text{ц},m}(\mathbf{R}^\infty)$ выражением

$$(Lu)(x) = -\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}(D_j(D_k u))(x) + q(x)u(x).$$

Теоремы 1 — 3 справедливы и для случая произвольной продакт-меры $d\rho(x) = (p_1(x_1)\, dx_1) \otimes (p_2(x_2)\, dx_2) \otimes \ldots$,

$$0 < p_n(x_n) \in C^2(\mathbf{R}^1), \int\limits_{\mathbf{R}^1} p_n(x_n)\, dx_n = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

при определенных условиях на веса $p_n(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и коэффициенты a_{jk}.

1. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* О самосопряженности дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 9, с. 691—695.
2. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— 65 с.
3. *Самойленко В. Г.* Об эллиптических операторах второго порядка с бесконечным числом переменных.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 3, с. 405—409.
4. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев: Наук. думка, 1978.— 358 с.
5. *Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь.* Интеграл, мера и производная на линейных пространствах.— М: Наука, 1976.— 192 с.
6. *Березанский Ю. М.* Самосопряженность эллиптических операторов с бесконечным числом переменных.— Укр. мат. журн., 1975, 28, № 6, с. 729—742.
7. *Ус Г. Ф.* О функциях от операторов, действующих по различным переменным.— В кн.: Операторы математической физики и бесконечномерный анализ. Киев : Наук. думка, 1979, с. 121—138.

Херсонский
педагогический институт

Поступила в редакцию 20.12.1980 г.
после переработки — 05.06.1981 г.