УДК 517.948:528

Г. П. Хома

Об исследовании систем уравнений Ван дер Поля в резонансном случае

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $2s$-го порядка

$$\ddot{x}_k + \omega_k^2 x_k = \varepsilon f_k(x_1, x_2, \ldots, x_s, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_s), \quad k = 1, 2, \ldots, s, \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, $f_k(x, \dot{x})$ — аналитические функции переменных x, $\dot{x}$ в $2s$-мерном шаре $\sum\limits_{k=1}^{s}(x_k^2 + \dot{x}_k^2) < R^2$.

В отличие от одномерного уравнения Ван дер Поля (см. [1—3]), когда имеется лишь одна основная частота, а поэтому не могут возникнуть резонансные соотношения между основными частотами, в системе уравнений Ван дер Поля (1) такие резонансные соотношения могут иметь место. Мы имеем в виду выполнение равенств вида $(k, \omega) = 0$, где k — целочисленный вектор, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s)$ — вектор частот.

В работе [4] методом замены переменных: $x_k = u_k \sin \omega_k t - v_k \cos \omega_k t$, $\dot{u}_k \sin \omega_k t - \dot{v}_k \cos \omega_k t = 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$, система (1) приводится к стандартной системе

$$dz/dt = \varepsilon Z(z, t), \tag{2}$$

где $z = (u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s)$, и методом последовательных приближений устанавливается следующий результат.

Теорема 1. *Пусть:* 1) *вектор-функция $Z(z, t)$—аналитическая по z в единичном шаре K'_{2s}: $\sum\limits_{k=1}^{s}(u_k^2 + v_k^2) < 1$ и зависит от $t \in (-\infty, \infty)$ периодически или условно-периодически;* 2) *ее норма ограничена в области $K'_{2s} \times \mathbf{R}$ постоянной K;* 3) *вектор частот ω принадлежит единичному кубу $P_s = \{0 \leqslant \omega_k \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots, s\}$ и удовлетворяет неравенству $|(r, \omega)| > R(\omega)/\|r\|^{s+1}$, где $R(\omega)$ — величина, зависящая от ω;* 4) *решение $\bar{z}(t, \varepsilon)$ усредненной системы*

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \varepsilon \bar{Z}(\bar{z}) \equiv \varepsilon \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T Z(\bar{z}, t)\, dt,$$

при $t \in (-\infty, \infty)$ принадлежит K'_{2s} вместе со своей ρ-окрестностью. Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L, \rho, \omega) > 0$ такое, что при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ и *$0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ $\|z(t, \varepsilon) - \bar{z}(t, \varepsilon)\| < \eta$ и $z(0, \varepsilon) = \bar{z}(0, \varepsilon) = \bar{z}(0, \varepsilon) = 0$.* Покажем, что методом замены Крылова—Боголюбова [1, 2, 4] можно получить такой же результат и в резонансном случае.

Как известно [4], если $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s)$ — произвольный иррациональный вектор, принадлежащий единичному кубу P_s, то всегда можно выбрать подмножество целочисленных векторов r таких, что, с одной стороны, $\|r\| \to \infty$, а с другой стороны, $|(r, \omega)| \to 0$, т. е. приходим с ситуации, типичной для задач с малыми знаменателями. Но в этом случае можно иррациональный вектор ω приближенно заменить другим вектором $\omega' \in P_s$ (исключая случаи $(r, \omega') = 0$) так, чтобы

$$\omega_k - \omega'_k = \varepsilon \delta_k, \ k = 1, 2, \ldots, s; \ \delta_k = \text{const}, \tag{3}$$

где ε — малый параметр и

$$|(r, \omega')| > R(\omega')/\|r\|^{s+1} \tag{4}$$

(например, ω' может быть рациональным вектором).

Тогда существует другая усредненная система, с решением которой можно сравнивать решение стандартной системы, полученной с помощью преобразований Крылова—Боголюбова.

Итак, ищем решение возмущенной системы (1) в виде

$$x_k = a_k \cos(\omega_k' t + \theta_k), \quad \dot{x}_k = -\omega'_k a_k \sin(\omega_k' t + \theta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, s. \tag{5}$$

Для определения неизвестных функций $a_k(t, \varepsilon)$ и $\theta_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots, s$, получаем систему

$$\begin{gathered}\frac{da_k}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_k'} f_{0k}(a, \beta') \sin\beta_k' + \frac{\omega_k^2 - \omega_k'}{2\omega_k'} \sin 2\beta_k', \\ \cdots \\ \frac{d\theta_k}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a_k\omega_k'} f_{0k}(a, \beta') \cos\beta_k' + \frac{\omega_k^2 - \omega_k'^2}{\omega_k'} \cos^2\beta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, s,\end{gathered} \tag{6}$$

где $a = a_1, a_2, \ldots, a_s)$, $\beta' = (\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_s'$, $\beta_k' = \omega_k' t + \theta_k$, $f_{0k}(a, \beta') = f_k(a\cos\beta', -\omega' a \sin\beta')$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Имеет место тождество

$$(\omega_k^2 - \omega_k'^2)/\omega_k' = 2(\omega_k - \omega_k') + (\omega_k - \omega_k')^2/\omega_k'. \tag{7}$$

Учитывая (3) и (7), систему

$$\begin{gathered}d\alpha_k/dt = -\varepsilon\omega_k'^{-1} \underset{t}{M}\{f_{0k}(\alpha, \tilde{\beta}) \sin\tilde{\beta}\}, \quad dh_k/dt = \omega_k - \omega_k' - \\ -\varepsilon(\alpha_k\omega_k')^{-1} \underset{t}{M}\{f_{0k}(\alpha, \tilde{\beta}) \cos\tilde{\beta}\}, \quad k = 1, 2, \ldots, s,\end{gathered} \tag{8}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_s)$, $\tilde{\beta}_k = \omega_k' t + h_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, $\underset{t}{M}$ — оператор усреднения по явно входящему времени t, будем называть усредненной системой стандартной системы (6) в резонансном случае.

Системы (6) и (8) сокращенно запишем так:

$$da/dt = \varepsilon Z_1(t, a, \theta), \quad d\theta/dt = \varepsilon Z_2(t, a, \theta); \quad d\alpha/dt = \varepsilon \bar{Z}_1(\alpha, h), \quad dh/dt = \varepsilon \bar{Z}_2(\alpha, h).$$

Теорема 2 (резонансный случай). *Пусть: 1) вектор-функции $Z_1(t, a, \theta)$, $Z_2(t, a, \theta)$ зависят от t периодически или условно-периодически и аналитичны по a и θ в области* $K_{2s}' = \left\{\sum_{k=1}^{s} a_k^2(\cos^2\beta_k' + \omega_k'^2 \sin^2\beta_k') < R^2\right\}$; *2) их нормы ограничены в области $\mathbf{R} \times K_{2s}'$ постоянной K; 3) векторы частот ω и ω' принадлежат единичному кубу P_s, удовлетворяют условию (3) и выполнено неравенство (4); 4) $\{\alpha, h\} \in K_{2s}'$ при $t \in \mathbf{R}$ вместе со своей ρ-окрестностью. Тогда для любых $h > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon_0(\eta, L, \rho, \omega) > 0$ такое, что при $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ и $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ $\|a(t, \varepsilon) - \alpha(t, \varepsilon)\| < \eta$ и $\|\theta(t, \varepsilon) = h(t, \varepsilon)\| < \eta$, если $a(0, \varepsilon) = \alpha(0, \varepsilon) = 0$, $\theta(0, \varepsilon) = h(0, \varepsilon) = 0$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 (см. [4]).

Замечание. Следует отметить, что рассмотренный резонансный случай обобщает резонансный случай для одного уравнения второго порядка под влиянием внешних периодических сил (см. [1]). При определенных условиях он может быть применен и к системам второго порядка вида (1), когда правая часть зависит периодически или условно-периодически от времени.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний.— М.: Наука, 1972.— 470 с.
4. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М.: Наука, 1979.— 432 с.

Тернопольский
педагогический институт

Поступила в редакцию
04.05.1981 г.