УДК 517.922

С. В. Исраилов

Исследование функциональной краевой задачи для дифференциальных уравнений высших порядков

1. Пусть задано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad x \in [a, b], \tag{1}$$

с нелинейными условиями

$$y^{(i-1)}(a_k) = \int_a^b F_{ik}(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t))\,dt, \quad i = 1, 2, \dots, r_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = b, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_m = n, \quad 2 \leqslant m \leqslant n. \tag{2}$$

Когда функции $F_{ik}(x, y, y', \dots, y^{(n)})$, $i = 1, 2, \dots, r_k$ $k = 1, 2, \dots, m$, не зависят от $y, y', \dots, y^{(n)}$, имеем исследованную многими авторами [1—3] задачу Валле Пуссена.

В общем случае задача (1), (2), которую будем называть функциональной краевой задачей, не изучена.

Пусть функции $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ непрерывны по x при $x \in [a, b]$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} |f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - f(x, z, z', \dots, z^{(n-1)})| \leqslant \sum_{\gamma=0}^{n-1} L_\gamma |y^{(\gamma)} - z^{(\gamma)}|, \\ |F_{ik}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) - F_{ik}(x, z, z', \dots, z^{(n)})| \leqslant \sum_{\gamma=0}^{n} L_{ik\gamma}(x)\,|y^{(\gamma)} - z^{(\gamma)}|, \end{gathered} \tag{3}$$

где L_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$, — постоянные числа; $L_{ik\gamma}(x)$, $i = 1, 2, \dots, r_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\gamma = 0, 1, \dots, n$, — интегрируемые на $[a, b]$ функции.

Рассмотрим матрицу $P = (p_{k\gamma})_{k,\gamma=0}^{n-1}$, где

$$p_{k\gamma} = |D^{-1}| \sum_{\nu=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} \frac{(k+\nu-1)!}{(\nu-1)!} |A_{r_1+r_2+\dots+r_{j-1}+i,k+\nu}| \times$$

$$\times (b-a)^{\nu-1} \int_a^b [L_{ij\gamma}(t) + L_{ijn}(t) L_\gamma]\,dt + C_{nk}(b-a)^{n-k} L_\gamma,$$

A_{rl} — алгебраические дополнения элементов определителя D, $r = 0, 1, \dots$ $\dots, n-1$, $l = 0, 1, \dots, n-1$ (выражение для D см. на с. 705),

$$C_{n0} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n!\,n^n}, \qquad C_{nk} = \frac{k}{(n-k)!\,n!}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Теорема 1. *Пусть функции $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ непрерывны по совокупности аргументов. Тогда краевая задача (1), (2)* *эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению*

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_j} D^{-1}A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,\nu}\,x^{\nu-1}\int_a^b f_{ij}(t, y(t), y'(t), \ldots$$

$$\ldots, y^{(n-1)}(t),\ f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\,dt+\int_a^b Q(x,s)\,f(s, y(s), \ldots, y^{(n-1)}(s))\,ds, \tag{4}$$

где $Q(x, s)$ *— функция Грина задачи*

$$y^{(n)}=h(x),\quad y^{(i-1)}(a_k)=0,\quad i=1,2,\ldots,r_k,\quad k=1,2,\ldots,m. \tag{5}$$

$$D=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & & & & a_1^{n-1}\\
0 & 1 & 2a_1 & \cdots & & & & (n-1)\,a_1^{n-2}\\
0 & 0 & 2 & \cdots & & & & (n-1)(n-2)\,a_1^{n-3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & 0\,\dfrac{(r_1-1)}{0!} & \dfrac{r_1!}{1!}\,a_1 & \cdots & \dfrac{(n-1)!}{(n-r_1)!} & a_1^{n-r_1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
1 & a_m & a_m^2 & \cdots & & & & a_m^{n-1}\\
0 & 1 & 2a_m & \cdots & & & & (n-1)\,a_m^{n-2}\\
0 & 0 & 2 & \cdots & & & & (n-1)(n-2)\,a_m^{n-3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & 0\,\dfrac{(r_m-1)!}{0!} & \dfrac{r_m!}{1!}\,a_m & \cdots & \dfrac{(n-1)!}{(n-r_m)!} & a_m^{n-r_m}
\end{vmatrix}$$

Доказательство. Пусть $C^{(n)}(a, b)$ — множества n-кратно непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций и пусть $y(x)\in C^{(n)}(a, b)$ — решение задачи (1), (2). Имеем тождества

$$\begin{gathered}y^{(n)}(x)\equiv f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),\\ y^{(i-1)}(a_k)\equiv A_{ik}^{*},\quad i=1,2,\ldots,r_k,\quad k=1,2,\ldots,m,\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$A_{ik}^{*}=\int_a^b F_{ik}(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\,dt. \tag{7}$$

Определим полином $P(x)=p_0+p_1x+\ldots+p_{n-1}x^{n-1}$ так, чтобы его коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ были решением системы алгебраических уравнений

$$P^{(i-1)}(a_k)=A_{ik}^{*},\quad i=1,\ldots,r_k,\quad k=1,\ldots,m. \tag{8}$$

Так как $D\neq 0$, то система (8) имеет единственное решение

$$p_\nu=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_j} D^{-1}A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,\nu+1}A_{ik}^{*},\quad \nu=0,1,\ldots,n-1, \tag{9}$$

и для полинома $P(x)$ имеем выражение

$$P(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} D^{-1} A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,\nu} A_{ik}^{*} x^{\nu-1}. \qquad (10)$$

В силу (5), (6) и (10) имеем тождество

$$y(x) \equiv P(x) + \int_a^b Q(x, s) f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, dt, \qquad (11)$$

или ввиду (7) и (10)

$$y(x) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} D^{-1} A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,\nu} x^{\nu-1} \times$$

$$\times \int_a^b F_{ij}(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, dt +$$

$$+ \int_a^b Q(x, t) f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, dt, \qquad (12)$$

т. е. функция $y(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (4).

Пусть теперь функция $y(x) \in C^{(n-1)}(a, b)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (4). Из (15) ясно, что

$$\frac{\partial^{i-1} Q(a_k, s)}{\partial x^{i-1}} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда из (12) в силу свойств полинома $P(x)$ видно, что

$$y^{(i-1)}(a_k) = \int_a^b F_{ik}(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, dt.$$

Так как $P^{(n)}(x) \equiv 0$, то после n-кратного дифференцирования обеих частей тождества (12) получим

$$y^{(n)}(x) \equiv \int_a^b \frac{\partial^n Q(x, t)}{\partial x^n} f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, dt +$$

$$+ \left[\frac{\partial^{(n-1)} Q(x+0, x)}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial^{(n-1)} Q(x-0, x)}{\partial x^{n-1}} \right] f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).$$

Отсюда в силу свойств функции Грина $Q(x, t)$ для задачи (15) [3] имеем тождество

$$y^{(n)}(x) \equiv f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)).$$

Следовательно, функция $y(x) \in C^n(a, b)$ является решением задачи (1), (2). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функции* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *непрерывны по* x *при* $x \in [a, b]$, *удовлетворяют условиям* (3) *и матрица* $P = (p_{k\gamma})_{k,\gamma=0}^{n-1}$ *такова, что*

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k < 1, \qquad (13)$$

где

$$p_k = \max\{P_{k\gamma} : \gamma = 0, 1, \ldots, n-1\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Тогда задача (1), (2) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Определим на $C^{(n-1)}(a, b)$ оператор T формулой

$$Ty = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} D^{-1} A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,\nu} x^{\nu-1} \int_a^b F_{ij}(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), \tag{14}$$

$$f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\,dt + \int_a^b Q(x, t) f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\,dt$$

и введем метрику

$$\rho(y, z) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i(y, z) = \sum_{i=0}^{n-1} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y^{(i)}(x) - z^{(i)}(x)|, \quad y, z \in C^{(n-1)}(a, b). \tag{15}$$

Оператор T переводит множество $C^{(n-1)}(a, b)$ в $C^{(n)}(a, b)$ $(C^{(n-1)}(a, b))$, т. е. в себя, и ясно, что $C^{(n-1)}(a, b)$ является полным метрическим пространством. Для $y(x), z(x)$ из $C^{(n-1)}(a, b)$ составим разность

$$v(x) = Ty - Tz = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} D^{-1} A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,\nu}\, x^{\nu-1} \times$$

$$\times \int_a^b [F_{ij}(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) -$$

$$- F_{ij}(t, z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t), f(t, z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t))]\,dt +$$

$$+ \int_a^b Q(x, t) [f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) - f(t, z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t))]\,dt. \tag{16}$$

Положим

$$u(x) = \int_a^b Q(x, t) [f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t) - f(t, z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t))]\,dt. \tag{17}$$

Функция $u(x)$ имеет на $[a, b]$ не менее n нулей, поэтому справедливы неравенства [2]

$$|u^{(k)}(x)| \leqslant C_{nk} (b - a)^{n-k} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |u^{(n)}(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{18}$$

Но

$$u^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x) - f(x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)),$$

потому в силу (3)

$$|u^{(n)}(x)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} L_\nu |y^{(\nu)}(x) - z^{(\nu)}(x)| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n-1} L_\nu \rho_\nu(y, z). \tag{19}$$

Имея в виду (19), из (18) получим

$$|u^{(k)}(x)| \leqslant C_{nk} (b - a)^{n-k} \sum_{\nu=0}^{n-1} L_\nu \rho_\nu(y, z). \tag{20}$$

Учитывая (17), продифференцируем обе части (16) k раз по x, что дает равенства

$$v^{(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} \frac{(k + \nu - 1)!}{(\nu - 1)!} D^{-1} A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,k+\nu} x^{\nu-1} \times$$

$$\times \int_a^b [F_{ij}(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) -$$

$$- F_{ij}(t, z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t), f(t, z(t), z'(t), \ldots, z^{(n-1)}(t)]\,dt + u^{(k)}(x). \tag{21}$$

На основании (3) и (20), из (21) имеем оценки

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |v^{(k)}(x)| \leqslant \Bigg[|D^{-1}| \sum_{\nu=1}^{n-k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{r_j} \frac{(k+\nu-1)!}{(\nu-1)!} \times$$

$$\times |A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,k+\nu}| (b-a)^{\nu-1} \int_a^b \sum_{\gamma=0}^{n-1} [L_{ij\gamma}(t) + L_{ijn}(t) L_\gamma]\, dt + \qquad (22)$$

$$+ C_{nk}(b-a)^{n-k} L_\gamma \Bigg] \rho_\gamma(y,z) = \sum_{\gamma=0}^{n-1} p_{k\gamma}\rho_\gamma(y,z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда, ввиду (13)—(16)

$$\rho(Ty, Tz) = \sum_{k=0}^{n-1} \max_{a\leqslant x\leqslant b} |v^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} p_{k\gamma}\rho_\gamma(y,z) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} p_k \rho(y,z) < \rho(y,z).$$

Следовательно, оператор T на $C^{(n-1)}(a, b)$ является оператором сжатия, что равносильно существованию и единственности решения интегро-дифференциального уравнения (4) или, в силу теоремы 1, решения задачи (1), (2).

Теорема 3. *Пусть функции* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *непрерывны по* x *при* $x \in [a, b]$, *удовлетворяют условиям* (3) *и собственные числа матрицы* $P = (p_{k\gamma})_{k,\gamma=0}^{n-1}$ *по модулю меньше единицы. Тогда задача* (1), (2) *имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть задача (1), (2) имеет два решения $y(x)$, $z(x)$ из $C^{(n)}(a, b)$. Учитывая соответствующие интегро-дифференциальные тождества и обозначения (см. (21) и (22)), имеем

$$\rho_k(y,z) \leqslant \sum_{\gamma=0}^{n-1} p_{k\gamma}\rho_\gamma(y,z), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда $\bar\rho \leqslant P\bar\rho$, где $\bar\rho = (\rho_i)_{i=0}^{n-1}$. Следовательно,

$$(E-P)\bar\rho \leqslant \bar 0, \qquad (23)$$

где $E = (\delta_{ik})_{i,k=0}^{n-1}$, δ_{ik} — символ Кронекера $\bar 0 = (0)_{i=0}^{n-1}$. Так как матрица P неотрицательна и все ее собственные числа по модулю меньше единицы, то и матрица $(E-P)^{-1}$ неотрицательна. Тогда из (23) следует, что $\bar\rho = \bar 0$, т. е. $\rho_i(y, z) \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, следовательно, $y(x) \equiv z(x)$. Теорема доказана.

2. Если ограничиться существованием решения задачи (1), (2), то условия (3) достаточно заменить другими условиями, содержащими ограничения на рост функций $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x, y, y, \ldots, y^{(n)})$.

Теорема 4. *Пусть функции* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ *непрерывны по совокупности аргументов и удовлетворяют условиям*

$$|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})| \leqslant L + \sum_{\gamma=0}^{n-1} L_\gamma |y^{(\gamma)}|, \qquad (24)$$

$$|F_{ik}(x, y, y', \ldots, y^{(n)})| \leqslant L_{ik}(x) + \sum_{\gamma=0}^{n} L_{ik\gamma}(x) |y^{(\gamma)}|,$$

где L *— любое число,* $L_{in}(x)$ *— любые интегрируемые на* $[a, b]$ *функции,* L_γ, $L_{ik\gamma^*}(x)$, $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, $\gamma^* = 0, 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, r_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *таковы, что имеет место неравенство* (13). *Тогда задача* (1) (2) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Положим

$$L_1=\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_j}\frac{(k+\nu-1)!}{(\nu-1)!}\,|D^{-1}A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,k+\nu}|\times\right.$$
$$\left.\times(b-a)^{\nu-1}\int_a^b[L_{ij}(t)+L\ L_{ijn}(t)]\,dt+LC_{nk}(b-a)^{n-k}\right\}. \qquad (25)$$

Возьмем $y(x)\in C^{(n-1)}(a,b)$, и пусть

$$\rho(y,0)\leqslant L_1/(1-q), \qquad (26)$$

где $q=\sum_{k=0}^{n-1}p_k$.

Учитывая (24), (13), (25) и (26), получим

$$\rho(Ty,0)=\sum_{\gamma=0}^{n-1}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\sum_{\nu=1}^{n-k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_j}\frac{(k+\nu-1)!}{(\nu-1)!}\times\right.$$
$$\times D^{-1}A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,k+\nu}x^{\nu-1}\int_a^b F_{ij}(t,y(t),y'(t),\ldots,f(y(t),y'(t),\ldots$$
$$\left.\ldots,y^{(n-1)}(t)))\,dt+\int_a^b\frac{\partial^kQ(x,t)}{\partial x^k}f(t,y)(t),y'(t),\ldots,y^{(n-1)}(t))\,dt\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_j}\frac{(k+\nu-1)!}{(\nu-1)!}\,|A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,k+\nu}D^{-1}|\times\right.$$
$$\left.\times(b-a)^{\nu-1}\int_a^b[L_{ij}(t)+LL_{i,n}(t)]\,dt+C_{nk}(b-a)^{n-k}L\right\}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n-k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{r_j}\frac{(k+\nu-1)!}{(\nu-1)!}\,|A_{r_1+r_2+\ldots+r_{j-1}+i,k+\nu}D^{-1}|\times\right.$$
$$\left.\times\int_a^b\sum_{\gamma=0}^{n-1}[L_{ij\gamma}(t)+L_\gamma L_{ijn}(t)]\,|y^{(\gamma)}(t)|\,dt+C_{nk}(b-a)^{n-k}\sum_{\gamma=0}^{n-1}L_\gamma\,|y^{(\gamma)}(t)|\right\}\leqslant$$
$$\leqslant L_1+\sum_{k=0}^{n-1}p_k\rho(y,0)\leqslant L_1+q\,\frac{L_1}{1-q}=\frac{L_1}{1-q}.$$

Это значит, что оператор T переводит шар радиуса $L_1(1-q)^{-1}$ пространства $C^{(n-1)}(a,b)$ в себя. Непрерывность функций $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, $F_{ik}(x,y,y',\ldots,y^{(n)})$ достаточна, чтобы оператор T был вполне непрерывным в $C^{(n-1)}(a,b)$, поэтому по принципу Шаудера оператор T имеет по крайней мере одну неподвижную точку, т. е. существует по крайней мере одно решение $y(x)$ задачи (1), (2).

1. *Бессмертных Г. А.* О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 2, с. 298—310.
2. *Бессмертных Г. А., Левин А. Ю.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной.— Докл. АН СССР, 1962, 144, № 3, с. 471—476.
3. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975, с. 115—161.

Грозненский
нефтяной институт

Поступила в редакцию
12.03.1981 г.