УДК 517.946

В. П. Лавренчук, М. И. Матийчук

Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейной параболической системы и задача без начальных условий

В работе [1] рассматривался вопрос о существовании глобального, т. е. определенного для всех $0 < t < \infty$, классического решения задачи Коши для уравнения $\partial u/\partial t = \Delta u + u^{1+\beta}$ в $(0, \infty) \times R^n$. Показано, что при $n\beta > 2$ такое решение существует, а при $n\beta \leqslant 2$ оно не существует. Аналогичный вопрос изучался в случае задачи Дирихле для квазилинейного параболического уравнения второго порядка с оператором Бесселя в работе [2].

В данной работе исследуется существование и единственность глобального решения общей краевой задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка с параметром. Методика, которая при этом используется, позволяет также доказать корректную разрешимость задачи без начальных условий для таких систем. При доказательствах существенно используются результаты работ [2—5].

1. **Глобальная разрешимость граничной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка.** Пусть Ω_0 — ограниченная область n-мерного пространства с границей Ω_1 и $Q^i_{t_0T} = [t_0, T] \times \Omega_i$, $-\infty \leqslant t_0 < t$, $0 < T \leqslant \infty$, $i = 0, 1$.

Рассмотрим в области $Q^0_{t_0,\infty}$, $t_0 \geqslant 0$, систему из N уравнений, содержащую N неизвестных функций

$$L(t, x, D_t + \lambda, D_x u \equiv [D_t + \lambda] u + \sum_{|k| \leqslant 2} a_k(t, x) D^k_x u = F_0(t, x, u), \tag{1}$$

начальные

$$u|_{t=t_0} = u_0(x) \tag{2}$$

и граничные

$$B_j(t, x, D_x) u \equiv \sum_{|k| \leqslant r_j} b_{jk}(t, x) D^k_x u|_{Q^1_{t_0,\infty}} = F_j(t, x, u) \tag{3}$$

условия, где $r_j \leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Будем предполагать выполненными следующие условия.

А. Операторы L и B_j удовлетворяют равномерным условиям параболичности по И. Г. Петровскому и дополнительности [6, 7].

Б. $a_k(t, x) \in H_0^{l+\alpha}$, $b_{jk} \in H_1^{2-r_j+l+\alpha}$, $\Omega_1 \in C^{2+l+\alpha}$, $l \geqslant \max(2l_0 + 1, 2)$, $0 < \alpha < 1$, $l_0 = \max_j (2 - r_j)$.

В. Функция $F_0(t, x, u(t, x))$ как функция (t, x) принадлежит H_0^α. Кроме того,

$$|F_0(t, x, y)| \leqslant C_1 |y|^{1+\beta}; \tag{4}$$

$$|F_0(t, x, y_1) - F_0(t, x, y_2)| \leqslant C_2 \max\{|y_1|^\beta, |y_2|^\beta\} |y_1 - y_2|, \tag{5}$$

где C_1, C_2 не зависят от (t, x), а β — произвольное положительное число.

Функции $F_j(t, x, u(t, x))$, $j = 1, 2, \ldots, N$, как функции (t, x) принадлежат $H_1^{2-r_j+\alpha}$ и

$$|F_j(t, x, y)| \leqslant C_3 |y|^{1+\gamma}; \tag{6}$$

$$|F_j(t, x, y_1 - F_j(t, x, y_2)| \leqslant C_4 \max\{|y_1|^\gamma, |y_2|^\gamma\} |y_1 - y_2|, \quad j = 1, 2, \ldots N, \tag{7}$$

где C_3 и C_4 не зависят от t, x, а γ — произвольное положительное число.

При изучении нелинейных задач важную роль играет выбор пространства, в котором изучается задача. Для его описания рассмотрим сначала линейную граничную задачу, соответствующую задаче (1)—(3),

$$L(t, x, D_t + \lambda, D_x) u = f_0(t, x), u|_{t=t_0} = u_0(x), \quad B_j(t, x, D_x) u = f_j(t, x),$$
$$j = 1, 2, \ldots, N. \tag{8}$$

Как показано в работе [4], существует единственное решение задачи (8), принадлежащее пространству $H_0^{2+\alpha}$, если выполняются условия A и Б, $f_0 \in H^\alpha$, $f_j \in H_1^{2-r_j+\alpha}$, $u_0 \in H^{2+\alpha}(\Omega_0)$ и функции $f_0, f_j (j = 1, 2, \ldots, N), u_0$ удовлетворяют условию согласования [7]. При этом данное решение представимо в виде

$$u(t, x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(t, x; \tau, \xi) f_0(\tau, \xi) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_1} G_j(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi) d\xi + \int_{\Omega_0} G_0(t, x; 0, \xi) u_0(\xi) d\xi. \tag{9}$$

Здесь $\{G_0(t, x; \tau, \xi), \quad G_1(t, x; \tau, \xi), \ldots, G_N(t, x; \tau, \xi), \quad G_0(t, x; 0, \xi)\}$ — матрица Грина неоднородной граничной задачи (8), изученная в работе [3]. Доказано, что для ее элементов выполняются неравенства

$$|D_x^k G_0(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C(t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{2}} \exp\{-(\lambda - A)(t - \tau) -$$
$$- c|x - \xi|^2 (t - \tau)^{-1}\}; \tag{10}$$

$$|D_x^k G_j(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C(t - \tau)^{-\frac{n+1-r_j+|k|}{2}} \exp\{-(\lambda - A)(t - \tau) -$$
$$- c|x - \xi|^2 (t - \tau)^{-1}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

где C, c, A — положительные постоянные, которые зависят от данных задачи. Будем считать, что параметр λ выбран настолько большим, что $\lambda - A = \mu^2$, $\mu \neq 0$.

Пусть

$$Z(t - \tau, x - \xi, \mu) = (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\{-\mu^2(t - \tau) - c|x - \xi|^2 (t - \tau)^{-1}\}.$$

Легко проверить, что имеет место равенство

$$\int_{E_n} Z(t - \tau, x - \xi, \mu) Z(\tau + \chi, \xi, \mu) d\xi = Z(t + \chi, x, \mu) \tag{12}$$

для всех $x \in E_n$, $\tau < t$ и произвольного $\chi > 0$.

Через $\widetilde{H}(B)$ обозначим пространство непрерывных в B функций, для которых конечна норма

$$\langle \varphi(t, x) \rangle_B = \sup_{\substack{(t,x)\in B \\ t > -\chi}} \frac{|\varphi(t, x)|}{Z(t + \chi, x, \mu)}. \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия A—B. Тогда для произвольного $\chi > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что если $u_0(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega_0)$ и*

$$\langle u_0(x) \rangle_{\Omega_0} \leqslant \sigma, \tag{14}$$

то задача (1) — (3) имеет единственное решение из класса $H_0^{2+\alpha}$ *такое, что*

$$\langle u(t,x)\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C, \tag{15}$$

где C *— постоянная, зависящая от данных задачи и* σ, *причем* $C \to 0$ *при* $\sigma \to 0$.

Доказательство. Как следует из условий теоремы и формулы (9), задаче (1)—(3) можно поставить в соответствие эквивалентное ей интегральное уравнение

$$u(t,x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(t,x;\tau,\xi)\, F_0(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_1} G_1(t,x;\tau,\xi)\, F_j(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\xi + \int_{\Omega_0} G_0(t,x;0,\xi)\, u_0(\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Будем решать уравнение (16) методом последовательных приближений

$$u_1(t,x) = u_0(t,x),\ u_{k+1}(t,x) = Uu_k + Vu_k + u_1, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где

$$u_0(t,x) = \int_{\Omega_0} G_0(t,x;0,\xi)\, u_0(\xi)\, d\xi,$$

$$Uu = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_0} G_0(t,x;\tau,\xi)\, F_0(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\xi,$$

$$Vu \equiv \sum_{j=1}^{N} V_j u = \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_1} G_j(t,x;\tau,\xi)\, F_j(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\xi. \tag{18}$$

Покажем, что последовательность $\{u_k(t,x)\}$ сходится в норме пространства $\tilde{H}(Q^0_{t_{0,\infty}})$.

Используя свойства функций F_0 и F_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, и определение нормы в пространстве $\tilde{H}$, получаем неравенства

$$|F_0(t,x,u)| \leqslant C\, \langle u\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{t_{0,\infty}}} Z^{1+\beta}(t+\chi, x, \mu),$$

$$|F_j(t,x,u)| \leqslant C\, \langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{t_{0,\infty}}} Z^{1+\gamma}(t+\chi, x, \mu), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{19}$$

Легко видеть, что

$$Z^{1+\delta}(t+\chi, x, \mu) \leqslant (t+\chi)^{-\frac{n\delta}{2}} \exp\{-\mu^2\delta(t+\chi)\}\, Z(t+\chi, x, \mu). \tag{20}$$

Оценим $\langle Uu\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}$ и $\langle Vu\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}$. Рассмотрим сначала $V_j u$. С учетом (11) и (19) имеем

$$|V_j u| \leqslant \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\Omega_1} |G_j(t,x;\tau,y)|\, |F_j(\tau,y,u(\tau,y))|\, dy \leqslant C\, \langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{1-r_j}{2}} d\tau \int_{\Omega_1} Z(t-\tau, x-y, \mu)\, Z^{1+\gamma}(\tau+\chi, y, \mu)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C\, \langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{1-r_j}{2}} (\tau+\chi)^{-\frac{n\gamma}{2}} \exp\{-\mu^2\gamma(\tau+\chi)\}\, d\tau \times$$

$$\times \int_{\Omega_1} Z(t-\tau), x-y, \mu)\, Z(\tau+\chi; y, \mu)\, dy \leqslant C\, \langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \times$$

$$\times \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2-r_j}{2}} (\tau+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\{-\mu^2\gamma(\tau+\chi)\}\, d\tau \times$$

$$\times \int_{\Omega_1} [(t-\tau)(\tau+\chi)]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|x-y|^2 (t-\tau)^{-1}\} \times$$

$$\times \exp\{-c\,|y|^2(\tau+\chi)^{-1}\}\, dy. \tag{21}$$

По условию теоремы $\Omega_1 \in C^{2+\alpha}$. Следовательно, ее можно покрыть простыми кусками S_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, причем каждый кусок проектируется на некоторую $(n-1)$-мерную область D_i с границей класса $C^{2+\alpha}$, лежащую в одной из координатных плоскостей, т. е. при некотором $p = p(i)$, $p = 1, 2, \ldots, n$, S_i описывается уравнением $\xi_p = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$, $(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n) \in D_i$, $\varphi_i \in C^{2+\alpha}(D_i)$.

Так как

$$\int_{\Omega_1} [(t-\tau)(\tau+\chi)]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|x-y|^2(t-\tau)^{-1}\} \exp\{-c\,|y|^2(\tau+\chi)^{-1}\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \int_{S_i} [(t-\tau)(\tau+\chi)]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|x-y|^2(t-\tau)^{-1}\} \times$$

$$\times \exp\{-c\,|y|^2(\tau+\chi)^{-1}\}\, dy, \tag{22}$$

то достаточно изучить интеграл по S_i. Для этого в интеграле по S_i перейдем к местной системе координат с началом в точке $y_0^{(i)} \in S_i$, т. е. сделаем преобразование

$$y = y_0^{(i)} + U(y_0^{(i)})\,\xi. \tag{23}$$

Для удобства возьмем $i = n$. Тогда

$$\int_{S_n} [(t-\tau)(\tau+\chi)]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|x-y|^2(t-\tau)^{-1}\} \exp\{-c\,|y|^2(\tau+\varkappa)^{-1}\} dy =$$

$$= \int_{D_n} [(t-\tau)(\tau+\chi)]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|\eta'-\xi'|^2(t-\tau)^{-1}\} \exp\{-c\,|\eta_n-\varphi_n(\xi')|^2 \times$$

$$\times (t-\tau)^{-1}\} \exp\{-c\,|\xi'|^2(\tau+\chi)^{-1}\} \exp\{-c\,|\varphi_n^2(\xi')(\tau+\chi)^{-1}\}\, |J(\xi')|\, d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{E_{n-1}} [(t-\tau)(\tau+\chi)]^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|\eta'-\xi'|^2(t-\tau)^{-1}\} \exp\{-c\,|\xi'|^2 \times$$

$$\times (\tau+\chi)^{-1}\}\, d\xi' = C(t+\chi)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|\eta'|^2(t+\chi)^{-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant C(t+\chi)^{-\frac{n-1}{2}} \exp\{-c\,|\eta|^2(t+\chi)^{-1}\} \leqslant C(t-\chi)^{-\frac{n-1}{2}} \times$$

$$\times \exp\{-c\,|x|^2(t+\chi)^{-1}\}. \tag{24}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2-r_j}{2}} (\tau+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\{-\mu^2\gamma(\tau+\chi)\}\, d\tau$$

и покажем, что он оценивается постоянной, не зависящей от t.

$$I = \int_{0}^{t-t_0} [\beta^{-\frac{2-r_j}{2}} (t-\beta+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\{-\mu^2\gamma(t-\beta+\chi)\}]\, d\beta =$$

$$= \int_{0}^{\frac{t-t_0}{2}} [\ldots]\, d\beta + \int_{\frac{t-t_0}{2}}^{t-t_0} [\ldots]\, d\beta = I_1 + I_2.$$

Имеем

$$I_1 \leqslant \left(\frac{t+t_0}{2}+\chi\right)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\left\{-\mu^2\gamma\left(\frac{t+t_0}{2}+\chi\right)\right\} \int\limits_0^{\frac{t+t_0}{2}} \beta^{-\frac{2-r_j}{2}} d\beta \leqslant$$

$$\leqslant C(t_0+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\{-\mu^2\gamma(t_0+\chi)\}\left(\frac{t-t_0}{2}\right)^{\frac{r_j}{2}} \exp\left\{-\mu^2\gamma\left(\frac{t-t_0}{2}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C(\mu^2\gamma)^{-\frac{r_j}{2}}(t_0+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\{-\mu^2\gamma(t_0+\chi)\} \equiv C_0(\mu),$$

$$I_2 \leqslant \left(\frac{t-t_0}{2}\right)^{-\frac{2-r_j}{2}}(t_0+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t_0+\chi)\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^{t-t_0} \exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t-\beta+\chi)\right\} d\beta \leqslant C(t_0+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t_0+\chi)\right\} \times$$

$$\times (t-t_0)^{-\frac{2-r_j}{2}} \frac{1}{\mu^2\gamma}\left[\exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t_0+\chi)\right\} - \exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t+\chi)\right\}\right] \leqslant$$

$$\leqslant C(t_0+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t_0+\chi)\right\} \equiv C_1(\mu),$$

так как выражение $\frac{1}{\mu^2\gamma}(t-t_0)^{-\frac{2-r_j}{2}}\left[\exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2}(t_0+\chi)\right\} - \exp\left\{-\frac{\mu^2\gamma}{2} \times (t+\chi)\right\}\right]$ ограничено при всех $t \geqslant t_0$, что легко доказывается, если рассмотреть отдельно случаи $t-t_0 \leqslant 1$ и $t-t_0 > 1$. Очевидно, что $C_0(\mu)$ и $C_1(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$.

Из полученной оценки для I, а также оценок (21), (22) и (24) вытекает, что

$$\langle V_j u\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_2(\mu)\langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{t_{0,\infty}}}. \tag{25}$$

Учитывая (10), (12), (19) и (20) и рассуждая аналогично предыдущему, получаем

$$\langle Uu\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_3(\mu)\langle u\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{t_{0,\infty}}}, \tag{26}$$

где $C_3(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$.

Так как $\langle Z\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant 1$, то, используя оценки (25) и (26), имеем

$$\langle Uz\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_3(\mu); \tag{27}$$

$$\langle Vz\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_4(\mu). \tag{28}$$

Далее, для произвольных $u, v \in \tilde{H}(Q^0_{t_{0,\infty}})$ таких, что $\langle u\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}, \langle v\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant K$, согласно (5), (7), (10) — (12), (27), (28), получаем

$$\langle Uu - Uv\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_5(\mu) K^{\beta}\langle u-v\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}; \tag{29}$$

$$\langle Vu - Vv\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_6(\mu) K^{\gamma}\langle u-v\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}. \tag{30}$$

Действительно,

$$|Uu - Uv| \leqslant CK^{\beta} \langle u - v\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \int\limits_{t_0}^{t} (\tau + \chi)^{-\frac{n\beta}{2}} \exp\{-\mu^2\beta(\tau + \chi)\} \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_0} Z(t-\tau, x-y, \mu) Z(\tau+\chi, y, \mu)\, dy \leqslant C_5(\mu) K^{\beta} Z(t+\chi, x, \mu) \langle u - v\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}.$$

Отсюда и следует (29). Аналогично устанавливается оценка (30).

Очевидно, что

$$\langle u_1\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_7(\mu) \langle u_0\rangle_{\Omega_0} \leqslant C_7(\mu)\, \sigma. \tag{31}$$

Поэтому из (17), (21), (26) и (31) получаем

$$\langle u_{k+1}\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_7(\mu)\,\sigma + C_8(\mu)\, [\langle u_k\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{t_{0,\infty}}} + \langle u_k\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{t_{0,\infty}}}].$$

Следовательно,

$$\langle u_k\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant W(\sigma, \mu), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

где $W(\sigma, \mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$ или $\sigma \to 0$.

Используя (17) и неравенства (29), (30) и (32), можно легко показать, что

$$\langle u_{k+1} - u_k\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}} \leqslant C_9(\mu)\, W^{\max(\beta,\gamma)}(\sigma, \mu) \langle u_k - u_{k-1}\rangle_{Q^0_{t_{0,\infty}}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Если выбрать σ настолько малым, чтобы $C_9(\mu)\, W^{\max(\beta,\gamma)}(\sigma, \mu) < 1$, то последовательность $\{u_k(t, x)\}$ будет сходящейся в пространстве $\widetilde{H}(Q^0_{t_{0,\infty}})$. Предельная функция $u(t, x) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(t, x)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению (16), и для нее имеет место оценка (15). Используя свойства матрицы Грина [3] и свойства функций F_0 и F_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, получаем, что $u(t, x) \in H^{\alpha}(Q^0_{t_{0,\infty}})$. Далее, из свойств интегралов, ядрами которых являются элементы матрицы Грина и их производные [3,4], следует, что $u(t, x) \in H^{2+\alpha}(Q^0_{t_{0,\infty}})$.

Замечание 1. Как отмечалось выше, постоянные $C_i(\mu)$, $i = 1, \ldots, \ldots, 9$, стремятся к нулю при $\mu \to \infty$. Поэтому, если выбрать μ, а следовательно, и λ достаточно большим, то можно сделать $C_9(\mu)\; W^{\max(\beta\gamma)}(\sigma, \mu) < 1$ при произвольном σ. Отсюда следует, что теорема имеет место и без условия малости нормы начальной функции, если параметр λ достаточно велик.

Замечание 2. Можно легко показать, что теорема верна и в случае, когда Ω_0 — неограниченная область с компактной границей или полупространство $x_n > 0$.

2. Корректная разрешимость задачи без начальных условий. Корректная разрешимость в пространствах Гельдера общих линейных граничных задач без начальных условий для параболических по И. Г. Петровскому систем, которые содержат параметр λ с достаточно большой действительной частью, установлена в [5]. Единственность решения таких задач для общих параболических систем доказана в [8]. Здесь мы докажем корректную разрешимость некоторой квазилинейной граничной задачи без начальных условий.

В области $Q^0_{-\infty,T}$, $T > 0$, рассмотрим граничную задачу без начальных условий

$$\begin{gathered} L(t, x, D_t + \lambda, D_x)\, u = F_0(t, x, u), \\ B_j(t, x; D_x)\, u = F_j(t, x, u) + f_j(t, x), \quad j = 1, 2, \ldots, N. \end{gathered} \tag{33}$$

Предполагаем, что выполняются условия $A - C$ в $Q^0_{-\infty,T}$. Кроме того,

Г. $F_0(t, x, u)$, $F_j(t, x, u)$, $f_j(t, x)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, равны нулю при $t < -x + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $f_j(t, x) \in H_1^{2-r_j+\alpha}$ и $\langle f_j\rangle\, Q^1_{-\infty,T} \leqslant \sigma$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

Используя результаты о корректной разрешимости линейной граничной задачи без начальных условий [5], которая соответствует задаче (33), получаем, что задача (33) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega_0}G_0(t,x;\tau,\xi)F_0(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega_1}G_j(t,x;\tau,\xi)f_j(\tau,\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega_1}G_j(t,x;\tau,\xi)F_j(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\xi. \tag{34}$$

Будем решать уравнение (34) методом последовательных приближений в пространстве $\widetilde{H}(Q^0_{-\infty,T})$ $u_{k+1}=Pu_k+Ru_k$, $k=0,1,2,\ldots$, где

$$u_0(t,x)=\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega_1}G_j(t,x;\tau,\xi)f_j(\tau,\xi)\,d\xi,$$

$$Pu=\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega_0}G_0(t,x;\tau,\xi)F_0(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\xi,$$

$$Ru=\sum_{j=1}^{N}R_ju\equiv\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{t}d\tau\int_{\Omega_1}G_1(t,x;\tau,\xi)F_j(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\xi. \tag{35}$$

Для доказательства сходимости последовательности $\{u_k(t,x)\}$ в пространстве $\widetilde{H}(Q^0_{-\infty,T})$ необходимо сначала, как и в п. 1, оценить $\langle Pu\rangle_{Q^0_{-\infty,T}}$ и $\langle Ru\rangle_{Q^0_{-\infty,T}}$. Рассмотрим Pu. Так как $F_0\equiv0$ для $t<-x+\varepsilon$, то

$$Pu=\int_{-\chi+\varepsilon}^{t}d\tau\int_{\Omega_0}G_0(t,x;\tau,\xi)F_0(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\,d\xi. \tag{36}$$

Учитывая (10), (12), (19), (20) и (36), имеем

$$|Pu|\leqslant C\langle u\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{t-\infty,T}}\int_{-\chi+\varepsilon}^{t}(\tau+\chi)^{-\frac{n\beta}{2}}\exp\{-\mu^2\beta(\tau+\chi)\}\,d\tau\times$$

$$\times\int_{E_n}Z(t-\tau,x-\xi,\mu)Z(\tau+\chi,\xi,\mu)\,d\xi\leqslant C\langle u\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{t-\infty,T}}\times$$

$$\times Z(t+\chi,x,\mu)\int_{-\chi+\varepsilon}^{t}(\tau+\chi)^{-\frac{n\beta}{2}}\exp\{-\mu^2\beta(\tau+\chi)\}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C\langle u\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{-\infty,T}}Z(t+\chi,x,\mu)$$

для всех β и $t\leqslant T$. Отсюда следует, что

$$\langle Pu\rangle_{Q^0_{-\infty,T}}\leqslant C\langle u\rangle^{1+\beta}_{Q^0_{-\infty,T}}. \tag{37}$$

Рассуждая так же, как и при оценке $|V_ju|$, и учитывая тот факт, что $F_j\equiv0$, $j=1,2,\ldots,N$ при $t<-\chi+\varepsilon$, получаем оценку

$$|R_ju|\leqslant C\langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{-\infty,T}}Z(t+\chi,x,\mu)\int_{-\chi+\varepsilon}^{t}(t-\tau)^{-\frac{2-r_j}{2}}\times$$

$$\times(\tau+\chi)^{-\frac{n\gamma+1}{2}}\exp\{-\mu^2\gamma(\tau+\chi)\}\,d\tau\leqslant C\langle u\rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{-\infty,T}}Z(t+\chi,x,\mu)$$

для произвольных γ и любых $t \leqslant T$. Следовательно,

$$\langle Ru \rangle_{Q^0_{-\infty,T}} \leqslant C \langle u \rangle^{1+\gamma}_{Q^0_{-\infty,T}}. \tag{38}$$

Далее, используя оценки (37) и (38), как и в п. 1, получаем

$$\langle u_k \rangle_{Q^0_{-\infty,T}} \leqslant C_1(\sigma), \tag{39}$$

$$\langle u_{k+1} - u_k \rangle_{Q^0_{-\infty,T}} \leqslant C_2(\sigma) \langle u_k - u_{k-1} \rangle_{Q^0_{-\infty,T}}.$$

Из (39) вытекает, что последовательность $\{u_k(t, x)\}$ сходится в пространстве $\widetilde{H}(Q^0_{-\infty,T})$, если σ выбрать так, чтобы $C_2(\sigma) < 1$. Предельная функция $u(t, x) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(t, x)$, очевидно, принадлежит пространству $\widetilde{H}(Q^0_{-\infty,T})$. Как и в случае задачи (1) — (3), можно показать, что $u(t, x) \in H^{2+\alpha}(Q^0_{-\infty,T})$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия А — Г. Тогда, если σ достаточно мало, существует единственное решение задачи* (33), *которое принадлежит пространству $H^{2+\alpha}(Q^0_{-\infty,T})$ и такое, что $\langle u \rangle Q^0_{-\infty,T} \leqslant C$, где постоянная C зависит от данных задачи и σ, причем $C \to 0$ при $\sigma \to 0$.*

Если μ — достаточно большое, то теорема 2 имеет место и без условия малости σ.

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М. : Мир, 1972.—587 с.
2. *Лавренчук В. П., Матийчук М. И.* О нелинейных B-параболических краевых задачах.— Мат. физика, 1977, вып. 21, с. 80—85.
3. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина общей неоднородной параболической задачи с граничными условиями любого порядка.— Докл. АН СССР, 1972, **206**, № 4, с. 796—799.
4. *Івасишен С. Д.* Інтегральні зображення розв'язків загальних параболічних крайових задач і коректна розв'язність у просторах зростаючих функцій.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 7, с. 596—599.
5. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости некоторых параболических граничных задач без начальных условий.— Дифференц. уравнения, 1978, № 2, с. 361—363.
6. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.—443 с.
7. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1965, **84**, с. 3—162.
8. *Олейник О. А.* О поведении решений линейных параболических систем дифференциальных уравнений в неограниченной области.— Успехи мат. наук, 1975, **30**, вып. 2, с. 219—220.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
10.06.1981 г.