УДК 517.948

Л. П. Нижник, Фам Лой Ву

Обратная нестационарная задача рассеяния для системы уравнений второго порядка

В данной работе рассматривается обратная задача рассеяния для системы уравнений

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = v_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} + c_{11}(x, t) u_1(x, t) + c_{12}(x, t) u_2(x, t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = v_2^2 \frac{\partial_2 u_2(x, t)}{\partial x^2} + c_{21}(x, t) u_1(x, t) + c_{22}(x, t) u_2(x, t),$$

где $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$; v_1, v_2 — скорости распространения волн, $v_1 > v_2 > 0$, а $c_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, 2$, — измеримые по x и t функции, удовлетворяющие условиям

$$\iint\limits_{E^2} |c_{ij}(x, t)| \, dx dt < \infty, \ i, j = 1, 2. \tag{2}$$

Если $c_{12}(x, t) = c_{21}(x, t) \equiv 0$, то система (1) состоит из двух не зависимых друг от друга уравнений струны, обратная задача рассеяния для которых на полуоси решена в [1], а на всей оси — в [2, 3]. Систему (1) можно рассматривать как модельную для распространения взаимодействующих продольных и поперечных волн в упругой среде.

1. Задача рассеяния. Если система (1) свободная, т. е. $c_{ij}(x, t) \equiv 0$, $i, j = 1, 2$, то ее общее решение имеет вид

$$u_i(x, t) = f_i(x + v_i t) + g_i(x - v_i t), \tag{3}$$

где $f_i(s)$, $g_i(s)$ — произвольные функции.

В предположении (2) решения системы (1) имеют вид (3) на бесконечности.

Лемма 1. *Всякое непрерывное равномерно ограниченное решение системы (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2), равномерно по x допускает асимптотическое представление*

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= a_1(x + v_1 t) + a_4(x - v_1 t) + o(1), \ t \to -\infty, \\ u_2(x t) &= a_2(x + v_2 t) + a_3(x - v_2 t) + o(1), \quad t \to -\infty, \\ u_1(x, t) &= b_1(x + v_1 t) + b_4(x - v_1 t) + o(1), \quad t \to +\infty, \\ u_2(x, t) &= b_2(x + v_2 t) + b_3(x - v_2 t) + o(1), \ t \to +\infty, \end{aligned} \tag{4}$$

где a_i, b_i — непрерывные ограниченные функции.

Приведем доказательство первого равенства в (4). Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — решение системы (1). Функция

$$\tilde{u}_1(x, t) = u_1(x, t) - \frac{1}{2v_1} \int\limits_{-\infty}^{t} d\tau \int\limits_{x+v_1(\tau-t)}^{x+v_1(t-\tau)} [c_{11}(y, \tau) u_1(y, \tau) + c_{12}(y, \tau) u_2(y, \tau)] \, dy$$

является непрерывной, равномерно ограниченной и удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \tilde{u}_1(x, t) = 0$. В силу (3) она допускает представление $\tilde{u}_1(x, t) =$

$= a_1(x + v_1 t) + a_4(x - v_1 t)$, где a_1, a_4 — непрерывные ограниченные функции. Это дает первое равенство в (4), ибо $u_1(x, t) - \tilde{u}_1(x, t) = o(1)$ равномерно по x при $t \to -\infty$. Аналогично доказываются и другие равенства в (4).

Фигурирующие в (4) функции $a_i(x + v_i t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $v_3 = -v_2$, $v_4 = -v_1$, называются падающими волнами, а $b_i(x + v_i t)$, $i = 1, 2, 3, 4$,—рассеянными. Функции a_i и b_i задают профили падающих и рассеянных волн.

Задача рассеяния для системы (1) состоит в нахождении ограниченного решения системы (1) по заданным падающим волнам.

Теорема 1. *Задача рассеяния для системы (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (2), однозначно разрешима. Для любых $a_i(s) \in C(E)$ существует и единственно ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее первым двум асимптотикам (4).*

Доказательство. Задача рассеяния эквивалентна системе интегральных уравнений в пространстве $C(E^2)$

$$u_1(x, t) = a_1(x + v_1 t) + a_4(x - v_1 t) +$$
$$+ \frac{1}{2v_1} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{x+v_1(\tau-t)}^{x+v_1(t-\tau)} [c_{11}(y, \tau) u_1(y, \tau) + c_{12}(y, \tau) u_2(y, \tau)]\, dy, \tag{5}$$
$$u_2(x, t) = a_2(x + v_2 t) + a_3(x - v_2 t) +$$
$$+ \frac{1}{2v_2} \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{x+v_2(\tau-t)}^{x+v_2(t-\tau)} [c_{21}(y, \tau) u_1(y, \tau) + c_{22}(y, \tau) u_2(y, \tau)]\, dy.$$

В силу вольтерровости системы (5) по переменной t ее однозначная разрешимость доказывается методом последовательных приближений с использованием леммы 1.2 работы [4].

Замечание 1. В теореме 1 вместо функций a_i можно задавать функции b_i, т. е. для любых функций $b_i(s) \in C(E)$, $i = 1, 2, 3, 4$, существует и единственно ограниченное решение системы (1), для которого выполняются третье и четвертое равенства (4).

Теорема 1 вместе с приведенным замечанием показывает, что асимптотические представления (4) однозначно определяются ограниченным решением системы (1), хотя в отдельности каждая функция a_i, b_i определяется с точностью до константы. Это обстоятельство приводит к различным сопоставлениям профилей падающих a_i и рассеянных b_i волн.

Определение 1. *Каждой вектор-функции $a(s) = \{a_i(s)\}_{i=1}^4 \in C(E; E^4)$ согласно теореме 1 соответствует ограниченное решение системы (1).*

Определим вектор-функцию $b(s) = \{b_i(s)\}_{i=4}^4 \in C(E; E^4)$ равенствами

$$b_i(s) = a_i(s) +$$
$$+ \frac{1}{2v_i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{s-v_i\tau} [c_{i1}(y, \tau) u_1(y, \tau) + c_{i2}(y, \tau) u_2(y, \tau)]\, dy, \quad i = 1, 2;$$
$$\tag{6}$$
$$b_i(s) = a_i(s) - \frac{1}{2v_j} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{s+v_j\tau} [c_{j1}(y, \tau) u_1(y, \tau) + c_{j2}(y, \tau) u_2(y, \tau)]\, dy,$$
$$i = 3, 4;\ j = 1, \text{ если } i = 4;\ j = 2, \text{ если } i = 3,$$

так, чтобы выполнялись асимптотики (4). Оператор S_1, переводящий $a(s)$ в $b(s)$, называется оператором рассеяния первого типа

$$b(s) = S_1 a(s). \tag{7}$$

Если определить вектор-функцию $\widetilde{b}(s) = \{\widetilde{b}_i(s)\}_{i=1}^4 \in C(E;\, E^4)$ равенствами

$$\widetilde{b}_i(s) = b_i(s) - K_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{8}$$

где

$$K_i = \lim_{s\to+\infty}(b_i(s) - a_i(s)) = \lim_{s\to-\infty}(a_i(s) - \widetilde{b}_i(s)),$$

то асимптотики (4) также выполняются, а оператор S_2, переводящий $a(s)$ в $\widetilde{b}(s)$, будем называть оператором рассеяния второго типа

$$\widetilde{b}(s) = S_2 a(s). \tag{9}$$

Легко показать, что операторы рассеяния S_1, S_2 являются ограниченными операторами в пространстве $C(E;\, E^4)$ и существуют ограниченные обратные S_1^{-1}, S_2^{-1}.

2. Вольтерровские интегральные представления решений. При решении обратной задачи рассеяния — задачи восстановления коэффициентов уравнения по известному оператору рассеяния — важную роль играют интегральные вольтерровского типа представления решений. Для системы (1) такие представления дает лемма

Лемма 2. *Всякое непрерывное равномерно ограниченное решение $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ системы (1) с условием (2) допускает представление*

$$u(x, t) = [J + H^+(t)]\, T_t f^+(x); \tag{10}$$

$$u(x, t) = [J + H^-(t)]\, T_t f^-(x), \tag{11}$$

где $J = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$; $T_t f^{\pm}(x) = \{f_i^{\pm}(x + v_i t)\}_{i=1}^4$; $H^+(t) = \| H_{ij}^+ \|_{i=1, j=1}^{2, 4}$; $H^-(t) = \| H_{ij}^- \|_{i=1, j=1}^{2, 4}$, а H_{ij}^+ *и* H_{ij}^- — *интегральные вольтерровские операторы с переменным соответственно верхним и нижним пределами интегрирования, ядра* $H_{ij}^+(x, t, \xi)$ и $H_{ij}^-(x, t, \xi)$ *которых однозначно определяются системой (1), удовлетворяют оценкам*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\sup_{x,t} |H_{ij}^{\pm}(x, t, \xi)|)\, d\xi < +\infty, \quad i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3, 4, \tag{12}$$

и связаны с коэффициентами $c_{ij}(x, t)$ соотношениями

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) H_{11}^-(x, t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) H_{14}^-(x, t, x) = \frac{1}{2v_1} c_{11}(x, t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} H_{12}^-(x, t, \xi)\right)_{\xi=x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} H_{13}^-(x, t, \xi)\right)_{\xi=x} = \frac{1}{v_1^2 - v_2^2} c_{12}(x, t), \tag{13}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} H_{21}^-(x, t, \xi)\right)_{\xi=x} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} H_{24}^-(x, t, \xi)\right)_{\xi=x} = \frac{1}{v_1^2 - v_2^2} c_{21}(x, t),$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) H_{22}^-(x, t, x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{d}{dx}\right) H_{23}^-(x, t, x) = \frac{1}{2v_2} c_{22}(x, t).$$

Функции $f_i^+(s)$, $f_i^-(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$, являются непрерывными и ограниченными на всей оси. Наоборот, для любых $f_i^+(s)$, $f_i^-(s) \in C(E)$ представления (10), (11) дают ограниченные непрерывные решения системы (1).

Доказательство. Определим ядра $H_{ij}^-(x, t, \xi)$ $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, как решения систем интегральных уравнений

$$H_{11}^-(x, t, \xi) = \frac{1}{2v_1} \int_{t + \frac{\xi - x}{2v_1}}^{+\infty} c_{11}(\xi + v_1(t - \tau), \tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{2v_1}\int\limits_t^{+\infty}d\tau\int\limits_{x+v_1(t-\tau)}^{\min(x+v_1(\tau-t),\xi+v_1(t-\tau))}[c_{11}(y,\tau)H_{11}^-(y,\tau,\xi+v_1(t-\tau))+$$

$$+c_{12}(y,\tau)H_{21}^-(y,\tau,\xi+v_1(t-\tau))]\,dy,\quad \xi\geqslant x, \tag{14}$$

$$H_{21}^-(x,t,\xi)=\frac{1}{2v_2}\int\limits_{t+\frac{\xi-x}{v_1+v_2}}^{t+\frac{\xi-x}{v_1-v_2}}c_{21}(\xi+v_1(t-\tau),\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2v_2}\int\limits_t^{t+\frac{\xi-x}{v_1-v_2}}d\tau\int\limits_{x+v_2(t-\tau)}^{\min(x+v_2(\tau-t),\xi+v_1(t-\tau))}[c_{21}(y,\tau)H_{-11}(y,\tau,\xi+v_1(t-\tau))+$$

$$+c_{22}(y,\tau)H_{21}^-(y,\tau,\xi+v_1(t-\tau))]\,dy;$$

$$H_{12}^-(x,t,\xi)=-\frac{1}{2v_1}\int\limits_{t+\frac{x-\xi}{v_1-v_2}}^{t+\frac{\xi-x}{v_1+v_2}}c_{12}(\xi+v_2(t-\tau),\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2v_1}\int\limits_x^{\frac{v_1\xi-v_2x}{v_1-v_2}}dy\int\limits_{t+\frac{x-y}{v_1}}^{\min\left(t+\frac{y-x}{v_1},\,t+\frac{\xi-y}{v_2}\right)}[c_{11}(y,\tau)H_{12}^-(y,\tau,\xi+v_2(t-\tau))+$$

$$+c_{12}(y,\tau)H_{22}^-(y,\tau,\xi+v_2(t-\tau))]\,d\tau,\quad \xi\geqslant x, \tag{15}$$

$$H_{22}^-(x,t,\xi)=\frac{1}{2v_2}\int\limits_{t+\frac{\xi-x}{2v_2}}^{+\infty}c_{22}(\xi+v_2(t-\tau),\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2v_2}\int\limits_t^{\infty}d\tau\int\limits_{x+v_2(t-\tau)}^{\min(x+v_2(\tau-t),\xi+v_2(t-\tau))}[c_{21}(y,\tau)H_{12}^-(y,\tau,\xi+v_2(t-\tau))+$$

$$+c_{22}(y,\tau)H_{22}^-(y,\tau,\xi+v_2(t-\tau))]\,dy.$$

Разрешимость систем (14), (15) доказывается методом последовательных приближений. Оценки (12) и соотношения (13) следуют из (14), (15).

Пусть $f_i^+(s)\in C(E)$ — произвольные. Тогда формулы (10) удовлетворяют системе (1). Выпишем в явном виде асимптотическое представление (4) для решения (10) при $t\to-\infty$

$$u_1(x,t)=f_1^+(x+v_1t)+f_4^+(x-v_1t)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{-12}(x+v_1t,p)f_2^+(p)\,dp+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{-13}(x+v_1t,p)f_3^+(p)\,dp+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{-14}(x+v_1t,p)f_4^+(p)\,dp+o(1), \tag{16}$$

$$u_2(x,t)=f_2^+(x+v_2t)+f_3^+(x-v_2t)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{-23}(x+v_2t,p)f_3^+(p)\,dp+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A_{-24}(x+v_2t,p)f_4^+(p)\,dp+o(1).$$

Ядра $A_{-ij}(s, p)$ выражаются через $H_{ij}^{+}(x, t, \xi)$ и $c_{ij}(x, t)$ и удовлетворяют оценкам

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\sup_{s} |A_{-ij}(s, p)|)\, dp < +\infty. \tag{17}$$

Приведем лишь связь $A_{-12}(s, p)$ с $H_{i2}^{+}(x, t, \xi)$ и $c_{1i}(x, t)$, $i = 1, 2$,

$$A_{-12}(s, p) = -\frac{1}{2v_1} \int_{-\infty}^{\frac{s-p}{v_1-v_2}} c_{12}(p - v_2\tau, \tau)\, d\tau - \frac{1}{2v_1} \int_{\frac{v_1p-v_2s}{v_1-v_2}}^{+\infty} dy \int_{\frac{p-y}{v_2}}^{\frac{s+y}{v_1}} [c_{11}(y, \tau)\, H_{12}^{+} \times$$

$$\times (y, \tau, p - v_2\tau) + c_{12}(y, \tau)\, H_{22}^{+}(y, \tau, p - v_2\tau)]\, d\tau.$$

Пусть $u(x, t)$ — непрерывное равномерно ограниченное решение системы (1), а $a_i(s) \in C(E)$ — профили соответствующих этому решению падающих волн. Положим

$$f^{+}(s) = A_{-}^{-1} a(s), \tag{18}$$

где A_{-} — верхняя треугольная операторная матрица с единичным оператором на диагонали и с элементами A_{-ij} при $j > i$.

Построим по формуле (10) решение $\tilde{u}(x, t)$ системы (1). Покажем, что $u(x, t) \equiv \tilde{u}(x, t)$. В силу (14), (15) и (18) векторная функция $u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$ равномерно по x при $t \to -\infty$ имеет асимптотику $o(1)$. С другой стороны, $u(x, t) - \tilde{u}(x, t)$ как разность решений системы (1) является решением системы (1) и в силу теоремы 1 равна тождественно 0, т. е. $u(x, t) \equiv \tilde{u}(x, t)$. Представление (10) доказано. Представление (11) доказывается аналогично. Приведем лишь связь между $f^{-}(s)$ и $\tilde{b}(s)$

$$\tilde{b}(s) = B_{-} f^{-}(s), \tag{19}$$

где B_{-} — верхняя треугольная операторная матрица с единичным оператором на диагонали и с элементами B_{-ij} при $j > i$, ядра которых допускают оценки вида (17).

Фигурирующие в лемме 1 функции $f^{+}(s)$ и $f^{-}(s)$ будем называть «+» и «—» прообразами решения системы (1).

Определение 2. *Пусть $f^{+}(s)$ — произвольная вектор-функция из пространства $C(E)$. Определим по формуле (18) профили $a(s)$ падающих волн. Согласно теореме 1 существует и единственное решение $u(x, t)$ системы (1). Определим $\tilde{b}_i(s)$ по формуле (8) и $f^{-}(s)$ по формуле (19). Тем самым определен оператор $\tilde{S}$, переводящий $f^{+}(s)$ в $f^{-}(s)$, т. е. связывающий между собой $f^{+}(s)$ и $f^{-}(s)$, прообразы одного и того же решения системы (1)*

$$f^{-}(s) = \tilde{S} f^{+}(s). \tag{20}$$

3. Факторизационные свойства оператора рассеяния. Если представление (10) и (11) подставить соответственно в (6) и (8), учесть (18) и (19), то

$$b(s) = B_{+} \overset{+}{D} f^{+}(s); \tag{21}$$

$$a(s) = A_{+} \overset{-}{D} f^{-}(s), \tag{22}$$

где B_{+} и A_{+} — нижние треугольные операторные матрицы с единичным оператором на диагонали и с элементами соответственно B_{+ij} и A_{+ij}, $j < i$; $\overset{+}{D} = \operatorname{diag}(I + \overset{+}{D}_1,\ I + \overset{+}{D}_2,\ I + \overset{+}{D}_3,\ I + \overset{+}{D}_4)$; $\overset{-}{D} = \operatorname{diag}(I + \overset{-}{D}_1,\ I + \overset{-}{D}_2,\ I +$

$+\overline{D}_3,\ I+\overline{D}_4)$, а $\overset{+}{D}_i$, и $\overline{D}$, $i=1,2,3,4$, —интегральные вольтерровские операторы с переменным соответственно верхним и нижним пределами интегрирования

$$\overset{+}{D}_i f_i^+(s)=\int_{-\infty}^{s}\overset{+}{D}_i(s,p)f_i^+(p)\,dp,\quad \overline{D}_i f_i^-(s)=\int_{s}^{+\infty}\overline{D}_i(s,p)f_i^-(p)\,dp. \qquad (23)$$

Ядра операторных коэффициентов $\overset{+}{D}_i$, $\overline{D}_i$ и A_{+ij}, B_{+ij} удовлетворяют оценкам вида (17).

Используя (23), оценки ядер $\overset{+}{D}_i(s,p)$, $\overline{D}_i(s,p)$, на основании леммы 3 в [3] получаем

$$(I+\overset{+}{D}_i)^{-1}=I+\overset{+}{R}_i,\quad (I+\overline{D}_i)^{-1}=I+\overline{R}_i,\quad i=1,2,3,4,$$

где $\overset{+}{R}_i$ и $\overline{R}_i$, $i=1,2,3,4$,— интегральные вольтерровские операторы с переменными соответственно верхним и нижним пределами интегрирования, ядра которых удовлетворяют оценкам вида (17). Используя этот факт и определения операторов S_1, S_2 и $\widetilde{S}$, из (18), (19), (21), (22) получаем

$$S_1=B_+\overset{+}{D}A_-^{-1}; \qquad (24)$$

$$S_2=B_-\overline{D}^{-1}A_+^{-1}; \qquad (25)$$

$$\widetilde{S}=\overline{D}^{-1}A_+^{-1}A_-. \qquad (26)$$

Из (24)—(26) с учетом оценок (2), (12), (17) можно доказать следующую лемму.

Л е м м а 3. *Операторы S_i, $\widetilde{S}$ и S_i^{-1}, $\widetilde{S}^{-1}$, $i=1,2$, отличаются от единичного оператора на интегральный матричный оператор с ядрами, допускающими оценку вида (17).*

Введем матричные операторы $F^{(l)}$, $\widetilde{F}$ равенствами

$$F^{(l)}=\|F_{ij}^{(l)}\|=S_l-I,\ i,j=1,2,3,4;\quad l=1,2; \qquad (27)$$

$$\widetilde{F}=\|\widetilde{F}_{ij}\|=\widetilde{S}-I,\ i,j=1,2,3,4. \qquad (28)$$

Л е м м а 4. *Оператор $\widetilde{S}$ однозначно определяется по оператору рассеяния.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задан оператор рассеяния S_1 для системы уравнений (1), тогда известен и оператор $F^{(1)}=S_1-I$. Используя (8) и (27), находим

$$F_{ij}^{(2)}(s,\xi)=F_{ij}^{(1)}(s,\xi)-F_{ij}^{(1)}(+\infty,\xi),\quad i,j=1,2,3,4,$$

т. е. оператор S_2 однозначно определяется по заданному оператору S_1. Согласно (24) S_1 допускает правую треугольную факторизацию, а по (25) S_2 — левую треугольную факторизацию. Тогда факторизационные множители $B_+\overset{+}{D}$, A_- и B_-, $A_+\overline{D}$ однозначно находятся по S_1, а оператор $\widetilde{S}$ определяется по формуле (26), как произведение найденных множителей $\overline{D}^{-1}A_+^{-1}$ и A_-. Лемма доказана.

4. О б р а т н а я з а д а ч а р а с с е я н и я. Сопоставляя (10) с (11), из полученного выражения с учетом определения (28) получаем основные уравнения, связывающие $H^-(x,t,\xi)$ с $\widetilde{F}(x,t,\xi)$,

$$H_{ij}^-(x,t,\xi)+\int_{x}^{+\infty}\sum_{k=1}^{4}H_{ik}^-(x,t,\eta)\widetilde{F}_{kj}(\eta,t,\xi)\,d\eta+\Phi_{ij}(x,t,\xi)=0, \qquad (29)$$

$$j=1,2,3,4;\quad i=1,2,$$

где $\Phi_{1j}(x,t,\xi)=\widetilde{F}_{1j}(x,t,\xi)+\widetilde{F}_{4j}(x,t,\xi)$; $\Phi_{2j}(x,t,\xi)=\widetilde{F}_{2j}(x,t,\xi)+\widetilde{F}_{3j}(x,t,\xi)$.

В уравнениях (29) ξ — переменная, x, t — параметры, $\widetilde{F}_{ij}(x,t,\xi)$ — известные, а $H_{ij}^-(x,t,\xi)$, $j=1,2,3,4$; $i=1,2$,— искомые функции.

Лемма 5. *Если оператор $\widetilde{S}$ допускает левую факторизацию*

$$\widetilde{S} = (I + \overline{V})(I + \overset{+}{V}), \tag{30}$$

где $\overline{V}$ и $\overset{+}{V}$ — матричные интегральные вольтерровские операторы с переменными соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, то основные уравнения (29) имеют единственное решение в пространстве $L_1(E)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что однородные уравнения

$$h_{ij}(x, t, \xi) + \int\limits_x^{+\infty} \sum_{k=1}^{4} h_{ik}(x, t, \eta) \widetilde{F}_{kj}(\eta, t, \xi)\, d\eta = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad i = 1, 2, \tag{31}$$

имеют только тривиальное решение в $L_1(E)$. С этой целью рассмотрим уравнения

$$g_{ij}(x, t, \xi) + \int\limits_\xi^{+\infty} \sum_{k=1}^{4} g_{ik}(x, t, \omega) \overset{+}{V}_{kj}(\omega, t, \xi)\, d\omega = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \; i = 1, 2, \tag{32}$$

где
$$g_{ij}(x, t, \xi) = h_{ij}(x, t, \xi) + \int\limits_x^{\xi} \sum_{k=1}^{4} h_{ik}(x, t, \omega) \overline{V}_{kj}(\omega, t, \xi)\, d\omega, \tag{33}$$

$$j = 1, 2, 3, 4; \; i = 1, 2, \; \text{а}\ \overset{+}{V} = \|\overset{+}{V}_{kj}\|, \quad \overline{V} = \|\overline{V}_{kj}\|.$$

Легко проверить, что уравнения (31) эквивалентны уравнениям (32), (33), где $I + \overset{+}{V}$ и $I + \overline{V}$ — факторизационные множители факторизации (30). Однородные уравнения (32) вольтерровы по переменной ξ, поэтому они имеют нулевые решения $\{g_{ij}(x, t, \xi)\}_{j=1}^{4} \equiv 0$, $i = 1, 2$, в пространстве $L_1(E)$. Тогда из (33) получаем однородные вольтерровские уравнения, которые имеют в $L_1(E)$ также нулевое решение $\{h_{ij}(x, t, \xi\}_{j=1}^{4} \equiv 0$, $i = 1, 2$.

Замечание к лемме 5. Достаточным условием левой факторизации $\widetilde{S}$ является «малость» потенциала, например условие

$$\sum_{i,j=1}^{2} \iint\limits_{E^2} |c_{ij}(x, t)|\, dx dt < 1. \tag{34}$$

Перейдем к решению обратной задачи рассеяния, заключающейся в восстановлении потенциалов $c_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, 2$, по известному оператору S. Пусть в пространстве $C(E; E^4)$ задан оператор рассеяния S для системы уравнений (1) на всей оси. Тогда согласно лемме 4 по заданному S находится оператор $\widetilde{S}$. Таким образом, известен матричный оператор $\widetilde{F} = \widetilde{S} - I$. Составим основные уравнения (29). По лемме 5 эти уравнения имеют единственное решение $\{H_{ij}^{-}(x, t, \xi)\}_{j=1}^{4}$, $\xi \geqslant x$, $i = 1, 2$, где $\{H_{ij}^{-}(x, t, \xi\}_{j=1}^{4}$, $i = 1, 2$, однозначно определяются системой вида (1), связаны с потенциалами соотношениями (13). Сформулируем этот результат.

Теорема 2. *Пусть S — оператор рассеяния для системы уравнений (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (34), тогда коэффициенты $c_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, 2$, однозначно восстанавливаются по формулам (13), где $\{H_{ij}^{-}(x, t, \xi)\}_{j=1}^{4}$, $i = 1, 2$, — решения основных уравнений (29).*

1. *Нижник Л. П.* Обратная задача нестационарного рассеяния.— Докл. АН СССР, 1971, **196**, № 5, с. 1016—1019.
2. *Фам Лой Ву.* Обратная нестационарная задача рассеяния для возмущенного уравнения струны на всей оси.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 5, с. 630—637.
3. *Фам Лой Ву.* Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного уравнения струны.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.—18 с.
4. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния.— Киев : Наук. думка, 1973.—182 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
10.06.1982 г.