УДК 517.949.2

В. И. Фодчук, И. М. Черевко

К теории интегральных многообразий сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений

Будем исследовать вопрос о существовании и устойчивости интегральных многообразий линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, содержащих малый параметр при части производных. В отличие от случаев, рассмотренных в [1, 2], построенные интегральные многообразия не обязательно вырождаются в тривиальные при $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t), \\ \varepsilon\dot{y}(t) = C(t)y(t) + D(t)y(t-\varepsilon\Delta) + F(t)x(t) + G(t)x(t-\varepsilon\Delta), \end{gathered} \tag{1}$$

где x — m-мерный вектор, y — n-мерный вектор, ε — малый параметр. Соответствующая (1) вырожденная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)y(t), \quad 0 = [C(t) + D(t)]y(t) + [F(t) + G(t)]x(t). \tag{2}$$

Разрешая второе уравнение системы 2 относительно $y(t)$ и подставляя в первое уравнение, имеем

$$\begin{gathered} y(t) = [C(t) + D(t)]^{-1}[F(t) + G(t)]x(t), \\ \dot{x}(t) = \{A(t) - B(t)[C(t) + D(t)]^{-1}[F(t) + (G(t)]\}x(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Будем рассматривать еще укороченную систему

$$\varepsilon\dot{y}(t) = C(t)y(t) + D(t)y(t-\varepsilon\Delta). \tag{4}$$

Предположим, что система (1) удовлетворяет условиям:

1) матрицы A, B, C, D, F, G и их первые производные равномерно ограничены при $t \in (-\infty, \infty)$ некоторой положительной постоянной M;

2) матрица $[C(t) + D(t+\varepsilon\Delta)]$ неособая при $t \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$;

3) все корни характеристического уравнения $\det(C + De^{-\lambda\Delta} - \lambda E) = 0$ лежат в левой полуплоскости: $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha < 0$.

1. Теорема 1. *Пусть относительно системы (1) выполняются условия 1)—3). Тогда можно указать такое $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ существует интегральное многообразие системы (1), представимое в виде*

$$y = P(t, \varepsilon)x, \tag{5}$$

где $P(t, \varepsilon)$ — равномерно ограниченная при $t \in (-\infty, \infty)$ функция и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} P(t, \varepsilon) = -[C(t) + D(t)]^{-1}[F(t) + G(t)]. \tag{6}$$

Доказательство. В силу условия 3) матричное решение $Y(t, s)$ уравнения (4), определенное начальными условиями $Y(s, s) = E$,

$Y(t, s) = 0$ при $t < s$, удовлетворяет оценке

$$|Y(t, s)| \leqslant K e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}. \tag{7}$$

Определим последовательность

$$P_0 = 0, \ P_n(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} Y(t, s) [F(s) X_{n-1}(s, t) + G(s) X_{n-1}(s - \varepsilon\Delta, t)] \, ds,$$

$$n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где X_{n-1} — фундаментальная матрица уравнения

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t) P_{n-1}(t, \varepsilon)] \, x(t). \tag{9}$$

Так как $|X_0(s, t)| < e^{\beta|t-s|}$, $\beta = \| A(t) \|$, то из (7) — (9) при $\varepsilon < \alpha/(2\beta)$ находим

$$|P_1| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} [M e^{\beta(t-s)} + M e^{\beta(t-s+\varepsilon\Delta)}] \, ds \leqslant K_1,$$

где $K_1 = \dfrac{4KM}{\alpha} [1 + e^{\frac{1}{2}\Delta}]$.

Пусть P_{n-1} уже определено и для него верна такая же оценка. Тогда из (9) следует

$$|X_{n-1}| \leqslant e^{(\beta+\gamma K_1)|t-s|}, \ \gamma = \| B(t) \|. \tag{10}$$

Учитывая неравенства (7) и (10), получаем

$$|P_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} [M e^{(\beta+\gamma K_1)(t-s)} + M e^{(\beta+\gamma K_1)(t-s+\varepsilon\Delta)}] \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2KM}{\alpha - \varepsilon\beta - \varepsilon K_1 \gamma} < \frac{4KM}{\alpha} < K_1 \tag{11}$$

при $\varepsilon < \dfrac{\alpha}{4(\beta + K_1\gamma)}$. Следовательно, последовательность $P_n(t, \varepsilon)$ определена и равномерно ограничена при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим разность

$$|P_{n+1} - P_n| = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} \{ Y(t, s) [F(s) X_n(s, t) - X_{n-1}(s, t)] +$$

$$+ G(s) [X_n(s - \varepsilon\Delta, t) - X_{n-1}(s - \varepsilon\Delta, t)] \} \, ds.$$

Для разности $X_n - X_{n-1}$, учитывая (7), (10) и применяя неравенство Гроноулла — Беллмана, несложно получить оценку

$$|X_n - X_{n-1}| \leqslant \frac{\gamma}{\beta + \gamma K_1} e^{2(\beta+\gamma K_1)|t-s|} |P_n - P_{n-1}|. \tag{12}$$

Тогда

$$|P_{n+1} - P_n| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} K e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \left\{ \frac{M\gamma}{\beta + \gamma K_1} e^{2(\beta+\gamma K_1)(t-s)} + \right.$$

$$\left. + \frac{M\gamma}{\beta + \gamma K_1} e^{2(\beta+\gamma K_1)(t-s+\varepsilon\Delta)} \right\} |P_n - P_{n-1}| \, ds.$$

Обозначая $\delta_n = \sup |P_n - P_{n-1}|$, получим

$$\delta_{n+1} \leqslant \frac{2\gamma KM}{\beta + \gamma K_1} \frac{\delta_n}{\alpha - 2\varepsilon(\beta + \gamma K_1)} \leqslant \frac{4\gamma KM}{\alpha(\beta + \gamma K_1)} \delta_n < \frac{\gamma K_1}{\beta + \gamma K_1} \delta_n \tag{13}$$

при $\varepsilon < \dfrac{\alpha}{4(\beta + \gamma K_1)}$. Так как $\beta = \| A(t) \| > 0$, то $\dfrac{\gamma K_1}{\beta + \gamma K_1} < 1$, а это означает, что последовательность P_n сходится при всех $\varepsilon < \varepsilon_1 = \dfrac{\alpha}{4(\beta + \gamma K_1)}$.

Положим $P(t, \varepsilon) = \lim\limits_{n \to \infty} P_n(t, \varepsilon)$. В силу неравенства (11) имеем

$$|P(t, \varepsilon)| < K_1. \tag{14}$$

Покажем, что соотношение (5) определяет интегральное многообразие системы (1). Пусть $X(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t) P(t, \varepsilon)) x(t), \tag{15}$$

тогда $X(t, t_0) = \lim\limits_{n \to \infty} X_n(t, t_0)$, при этом сходимость будет равномерной на каждом интервале. Отсюда имеем

$$P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} Y(t, s) [F(s) X(s, t) + G(s) X(s - \varepsilon\Delta, t)] \, ds. \tag{16}$$

Если $x = x_t$ — решение системы (15), удовлетворяющее условию $x_{t_0} = x_0$, то его можно записать в виде $x_t = X(t, t_0) x_0$.

Обозначим

$$y_t = P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} Y(t, s) [F(s) X(s, t) + G(s) X(s - \varepsilon\Delta, t)] \, ds \cdot x_t =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{t} Y(t, s) [F(s) x_s + G(s) x_{s - \varepsilon\Delta}] \, ds. \tag{17}$$

Дифференцируя последнее тождество по t, убеждаемся, что y_t удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \dot{y}_t = C(t) y_t + D(t) y_{t - \varepsilon\Delta} + F(t) x_t + G(t) x_{t - \varepsilon\Delta}.$$

Поэтому (x_t, y_t) есть решение системы (1) и, следовательно, соотношение (5) определяет интегральное многообразие системы (1).

Покажем, что при $\varepsilon \to 0$ семейство решений (x_t, y_t) стремится к решению невозмущенной системы (2), т. е. выполняется соотношение (6).

Матричное решение $Y(t, s)$ уравнения (4) как функция второго аргумента есть решение сопряженного с (4) уравнения

$$\varepsilon \dot{Y}_s(t, s) = -Y(t, s) C(s) - Y(t, s + \varepsilon\Delta) D(s + \varepsilon\Delta). \tag{18}$$

Преобразуем (18) к виду

$$\varepsilon \dot{Y}_s(t, s) = -Y(t, s) [C(s) + D(s + \varepsilon\Delta)] - [Y(t, s + \varepsilon\Delta) - Y(t, s)] D(s + \varepsilon\Delta).$$

Из этого равенства имеем

$$Y(t, s) = -\varepsilon \dot{Y}_s(t, s) [C(s) + D(s + \varepsilon\Delta)]^{-1} - [Y(t, s + \varepsilon\Delta) - Y(t, s)] \times$$

$$\times D(s + \varepsilon\Delta) [C(s) + D(s + \varepsilon\Delta)]^{-1}.$$

Подставим полученное выражение для $Y(t, s)$ в (16)

$$P(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} \{-\varepsilon \dot{Y}_s(t, s)[C(s) + D(s + \varepsilon\Delta)]^{-1} [F(s) X(s, t) + G(s) \times$$

$$\times X(s - \varepsilon\Delta, t)]\} dS - \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{t} [Y(t, s + \varepsilon\Delta) - Y(t, s)] D(s + \varepsilon\Delta) [C(s) +$$

$$+ D(s + \varepsilon\Delta)]^{-1} [F(s) X(s, t) + G(s) X(s - \varepsilon\Delta, t)]\} ds = I_1(t, \varepsilon) + I_2(t, \varepsilon). \tag{19}$$

Интегрируя в первом интеграле по частям, получим

$$I_1(t, \varepsilon) = -[C(t) + D(t + \varepsilon\Delta)]^{-1} [F(t) + G(t) X(t - \varepsilon\Delta, t)] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} Y(t, s) \frac{d}{ds} \{[C(s) + D(s + \varepsilon\Delta)]^{-1} [F(s) X(s, t) + G(s) X(s - \varepsilon\Delta, t)]\} ds.$$

Так как функции C, D, F, G имеют ограниченные производные, то, используя оценки

$$|Y(t, s)| \leqslant Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}, \ |X(t, s)| \leqslant e^{\beta(t-s)}, \ |\dot{x}(t, s)| \leqslant Le^{\beta(t-s)},$$

находим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_1(t, \varepsilon) = -[C(t) + D(t)]^{-1} [F(t) + G(t)]. \tag{20}$$

Покажем, что второй интеграл в равенстве (19) стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для этого нам понадобится следующая лемма, аналогичная утверждению из [3, с. 13].

Лемма. *Для матричного решения $Y(t, s)$ уравнения (4) при любых $t \geqslant \tau \geqslant s > 0$ выполняется равенство*

$$Y(t, s) = Y(t, \tau) Y(\tau, s) + \int_{\tau - \varepsilon\Delta}^{\tau} Y(t, \xi + \varepsilon\Delta) D(\xi + \varepsilon\Delta) Y(\xi, s) d\xi. \tag{21}$$

Доказательство. Решение начальной задачи

$$\varepsilon\dot{y}(t) = C(t) y(t) + D(t) y(t - \varepsilon\Delta), \ y(\tau + \theta) = \varphi(\theta), \ -\varepsilon\Delta \leqslant \theta \leqslant 0,$$

согласно [4] можно записать в виде

$$y(t) = Y(t, \tau) y(\tau) + \int_{\tau - \varepsilon\Delta}^{\tau} Y(t, \xi + \varepsilon\Delta) D(\xi + \varepsilon\Delta) y(\xi) d\xi, \tag{22}$$

где $Y(t, \tau) y(\tau)$ — решение уравнения (4) с начальным условием

$$y(t) = 0, \ \tau - \varepsilon\Delta \leqslant t < \tau, \ y(\tau) = \varphi(0).$$

Тогда для любого $0 \leqslant s \leqslant \tau$ имеем

$$y(t) = Y(t, s) y(s) = Y(t, \tau) Y(\tau, s) y(s) + \int_{\tau - \varepsilon\Delta}^{\tau} Y(\tau, \xi + \varepsilon\Delta) D(\xi + \varepsilon\Delta) \times$$

$$\times Y(\xi, s) y(s) d\xi = \Big[Y(t, \tau) Y(\tau, s) + \int_{\tau - \varepsilon\Delta}^{\tau} Y(\tau, \xi + \varepsilon\Delta) D(\xi +$$

$$+ \varepsilon\Delta) Y(\xi, s) d\xi \Big] y(s).$$

Отсюда непосредственно следует выполнение равенства (21). Лемма доказана. Заменяя в (21) τ на $s+\varepsilon\Delta$, получим

$$Y(t,s)=Y(t,s+\varepsilon\Delta)\,Y(s+\varepsilon\Delta,s)+\int\limits_s^{s+\varepsilon\Delta}Y(t,\xi+\varepsilon\Delta)\,D(\xi+\varepsilon\Delta)\,Y(\xi,s)\,d\xi. \tag{23}$$

Используя представление (23) и условие 3), получаем следующую оценку:

$$|Y(t,s+\varepsilon\Delta)-Y(t,s)|=|Y(t,s+\varepsilon\Delta)-Y(t,s+\varepsilon\Delta)\,Y(s+\varepsilon\Delta;s)-$$

$$-\int\limits_s^{s+\varepsilon\Delta}Y(t,\xi+\varepsilon\Delta)\,D(\xi+\varepsilon\Delta)\,Y(\xi,s)\,d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s-\varepsilon\Delta)}|E-Y(s+\varepsilon\Delta,s)|+\int\limits_s^{s+\varepsilon\Delta}Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-\xi-\varepsilon\Delta)}|D|\times$$

$$\times Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(\xi-s)}d\xi=Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}e^{\alpha\Delta}[|E-Y(s+\varepsilon\Delta,s)|+\varepsilon\Delta K|D|]. \tag{24}$$

Так как функция $Y(t,s)$ непрерывна справа и $Y(s,s)=E$, то $|E-Y(s+$ $+\varepsilon\Delta,s)|=\omega(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, из (19), (24) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|I_2(t,\varepsilon)|\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t}Ke^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}e^{\alpha\Delta}[\omega(\varepsilon)+\varepsilon\Delta K|D|]\times$$

$$\times|D(s+\varepsilon\Delta)[C(s)+D(s+\varepsilon\Delta)]^{-1}[F(s)X(s,t)+G(s)X(s-\varepsilon\Delta,t]|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{t}Ke^{\alpha\Delta}[\omega(\varepsilon)+\varepsilon\Delta K|D|]\cdot|D|\,|C(s)+$$

$$+D(s+\varepsilon\Delta)]^{-1}Me^{(-\frac{\alpha}{\varepsilon}+\beta+\gamma K_1)(t-s)}ds=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K|D|\,|C(s)+D(s+\varepsilon\Delta)]^{-1}Me^{\alpha\Delta}}{\alpha-\varepsilon(\beta+\gamma K_1)}[\omega(\varepsilon)+\varepsilon\Delta K|D|]=0. \tag{25}$$

Учитывая (20) и (25), окончательно находим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P(t,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0}[I_1(t,\varepsilon)+I_2(t,\varepsilon)]=-[C(t)+D(t)]^{-1}[F(t)+G(t)].$$

Теорема 1 доказана.

2. Пусть $(x(t),\ y(t))$ — некоторое решение системы (1). Возникает вопрос: как будет вести себя это решение с возрастанием времени t, если его начальные значения (при $t\in[t_0-\varepsilon\Delta,\ t_0]$) достаточно близки к многообразию (5)? Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для системы (1) выполняются условия 1)—3). Тогда существует такое $\varepsilon_2>0$, что для всех $0<\varepsilon<\varepsilon_2<\varepsilon_1$ любое решение $(x_t,\ y_t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $x_{t_0}=x_0$, $y_t=\varphi(t)$ при $t\in[t_0-\varepsilon\Delta,\ t_0]$, будет притягиваться к многообразию (5) по закону*

$$|y_t-P(t,\varepsilon)\,x_t|\leqslant N(x_0,\varphi)\,e^{-\frac{\alpha}{2\varepsilon}(t-t_0)}.$$

Доказательство теоремы 2 несложно провести по схеме А. Халаная [1].

Замечание. Для системы дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\dot{x}(t)=A(t)\,x(t)+B(t)\,y(t),$$

$$\varepsilon\dot{y}(t)=C(t)\,y(t)+D(t)\,y(t-\varepsilon\Delta)+\varepsilon R(t)\,\dot{y}(t-\varepsilon\Delta)+F(t)\,x(t)+$$

$$+G(t)\,x(t-\varepsilon\Delta)+\varepsilon Q(t)\,\dot{x}(t-\varepsilon\Delta)$$

можно установить результаты, аналогичные теоремам 1 и 2.

Пример. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = ax(t) + by(t), \ \varepsilon\dot{y}(t) = dy(t) + cx(t), \tag{*}$$

где a, b, c, d — постоянные.

Вырожденная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = ax(t) + by(t), \ 0 = dy(t) + cx(t),$$

или

$$y(t) = -\frac{c}{d}x(t), \ \dot{x}(t) = \left(a - \frac{bc}{d}\right)x(t).$$

Рассмотрим укороченное уравнение $\varepsilon\dot{y}(t) = dy(t)$. Если $d < 0$, то условия 1) — 3) выполняются и согласно теореме 1 существует интегральное многообразие системы (*) вида (5), последовательные приближения для функции $P(t, \varepsilon)$ имеют вид

$$P_0 = 0, \ P_1 = -\frac{c}{d + \varepsilon a}, \ \ldots, P_n = -\frac{c}{d + \varepsilon a - \varepsilon P_{n-1}}, \ n = 1, 2, \ldots .$$

3. Изучим вопрос об устойчивости тривиального решения системы (1).

Лемма. *Пусть α — такое число в условии 3) теоремы 1, что выполняется неравенство*

$$48KM < \alpha, \tag{26}$$

тогда существует такое $\varepsilon^* > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ каждому решению (x_M, y_M) системы (1), лежащему на многообразии (5), соответствует решение (x_t, y_t) системы (1) такое, что при $t \geqslant t_0$

$$|x_t - x_M| < K|y_0|e^{-\sigma(t-t_0)}, \ |y_t - y_M| < K|y_0|e^{-\sigma(t-t_0)}, \tag{27}$$

где $\sigma \geqslant 4M + \beta$.

Доказательство. Предположим, что $x_M = y_M = 0$ и рассмотрим систему

$$\begin{gathered} x = -\int_t^\infty X(t, s)B(s)y(s)\,ds, \\ y = Y(t, t_0)y_0 + \int_{t_0-\varepsilon\Delta}^{t_0} Y(t, s + \varepsilon\Delta)D(s + \varepsilon\Delta)y(s)\,ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} Y(t, s)[F(s)x(s) + G(s)x(s - \varepsilon\Delta)]\,ds, \end{gathered} \tag{28}$$

каждое решение которой является решением системы (1). Покажем, что решение системы (28) удовлетворяет соотношениям (27). Обозначим $z = (x, y)$, $|z| = |x| + |y|$, $\|z\| = \sup\limits_{t \geqslant 0}\{e^{\sigma t}|z(t)|\}$. Пусть $Z = \{z = z(t) : \|z\| \leqslant \leqslant 2K|y_0|\}$.

Рассмотрим на Z отображение

$$\begin{gathered} \bar{x} = -\int_t^\infty X(t, s)B(s)y(s)\,ds, \\ \bar{y} = Y(t, t_0)y_0 + \int_{t_0-\varepsilon\Delta}^{t_0} Y(t, s + \varepsilon\Delta)D(s + \varepsilon\Delta)y(s)\,ds + \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} Y(t, s)[F(s)x(s) + G(s)x(s - \varepsilon\Delta)]\,ds. \end{gathered} \tag{29}$$

Исходя из условий 1) — 3) и выбора σ, имеем

$$|\bar{x}| \leqslant \left| \int_t^{\infty} X(t, s) B(s) y(s)\, ds \right| \leqslant M \int_t^{\infty} e^{\beta(t-s)} e^{-\sigma(s-t_0)} \| z \|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\sigma - \beta} e^{-\sigma(t-t_0)} 2K |y_0| \leqslant \frac{1}{2} K |y_0| e^{-\sigma(t-t_0)}. \tag{30}$$

Учитывая (26), находим

$$|\bar{y}| \leqslant K e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-t_0)} |y_0| + KM \int_{t_0-\varepsilon\Delta}^{t_0} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s-\varepsilon\Delta)} e^{-\sigma(s-t_0)} \| z \|\, ds +$$

$$+ \frac{KM}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} e^{-\sigma(s-t_0)} [1 + e^{\varepsilon\sigma\Delta}] \| z \|\, ds = K e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-t_0)} |y_0| +$$

$$+ \frac{\varepsilon K M e^{\alpha\Delta}}{\alpha - \varepsilon\sigma} e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-t_0)} 2K |y_0| + \frac{KM(1 + e^{\varepsilon\sigma\Delta})}{\alpha - \varepsilon\sigma} e^{-\sigma(t-t_0)} 2K |y_0| \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{2\varepsilon K M e^{\alpha\Delta}}{\alpha - \varepsilon\sigma} + \frac{2KM(1 + e^{\varepsilon\sigma\Delta})}{\alpha - \varepsilon\sigma}\right) K |y_0| e^{-\sigma(t-t_0)} = QK |y_0| e^{-\sigma(t-t_0)}.$$

Оценим выражение Q. При $\varepsilon \leqslant 0{,}5\alpha\sigma^{-1}$ имеем $Q \leqslant [1 + 4\varepsilon K M e^{\alpha\Delta}\alpha^{-1} + 4KM(1 + e^{\varepsilon\sigma\Delta})\alpha^{-1}$. Пусть $\varepsilon < \alpha/(16KMe^{\alpha\Delta})$ и $\varepsilon < \ln 2/\Delta\sigma$, получим $Q \leqslant 1 + 0{,}25 + 12KM\alpha^{-1}$. С учетом (26) $Q \leqslant 1{,}5$. Следовательно,

$$|y| \leqslant 1{,}5K |y_0| e^{-\sigma(t-t_0)}. \tag{31}$$

Из (30) и (31) следует, что преобразование, определяемое равенствами (29), отображает множество Z в себя. Из (29) имеем

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leqslant M \int_t^{\infty} e^{\beta(s-t)} e^{-\sigma(s-t_0)} \| z_1 - z_2 \|\, ds \leqslant 0{,}25 e^{-\sigma(t-t_0)} \| z_1 - z_2 \|. \tag{32}$$

Как и в (31), получаем

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \leqslant 0{,}25 e^{-\sigma(t-t_0)} \| z_1 - z_2 \|. \tag{33}$$

Из (32) и (33) имеем неравенство $\| z_1 - z_2 \| \leqslant 0{,}5 \| z_1 - z_2 \|$, из которого следует, что (29) задает сжимающее отображение на Z. Неподвижная точка $z_t = (x_t, y_t) \in Z$ этого отображения является решением системы (28), удовлетворяющим соотношениям (27) при $x_M = y_M = 0$.

Если x_M, y_M не равны нулю, то, выполняя замену в системе (1) $x = x_M + u$, $y = y_M + v$, придем к уже рассмотренному случаю.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 1 и леммы 2, то тривиальное решение системы (2) устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво) тогда и только тогда, когда тривиальное решение системы* $\dot{x}(t) = [A(t) + B(t) P(t, \varepsilon)] x(t)$, *т. е. системы на интегральном многообразии, устойчиво (асимптотически устойчиво, неустойчиво).*

Доказательство теоремы 3 легко получить, используя лемму 2.

1. *Halanay A.* An invariant serfase for some linear singulary perturbed systems with time lag.— J. Different. Equat., 1966, 2, N 1. p. 33—46.
2. *Митропольский Ю. А., Фодчук В. И.* Об устойчивых интегральных многообразиях для одного класса сингулярно возмущенных систем с запаздыванием.— Укр. мат. журн., 1968, 20, № 6, с. 791—801.
3. *Тышкевич В. А.* Некоторые вопросы теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1981.—77 с.
4. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.— М. : Мир, 1967.— 548 с.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
30.11.1981 г.