УДК 517.948.34

Е. П. Белан

Асимптотический метод в теории квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка

В данной статье метод Крылова — Боголюбова [1] построения асимптотических приближенных решений в случае резонанса распространен на интегро-дифференциальные уравнения вида

$$(Dx)(t)=\varepsilon\left(g_1\left(\nu t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)+\int\limits_0^\infty g_2\left(\nu(t-s),\ x(t-s),\ \frac{dx(t-s)}{dt}\right)dk(s)\right), \tag{1}$$

где D — линейный интегро-дифференциальный оператор

$$(Dx)(t)=\left(\frac{d}{dt^2}+\alpha_1\frac{d}{dt}+\alpha_2\right)x(t)+\int\limits_0^\infty\left(\beta_1\frac{d}{dt}+\beta_2\right)x(t-s)\,dk(s), \tag{2}$$

k — имеет на $[0,\infty)$ ограниченное изменение, $g_i(\nu t, x, y)$, $i=1,2$ — функции, гладкие на $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$, 2π-периодичные по νt, $\alpha_i,\beta_i\in\mathbf{R}$, $i=1,2$, ε — малый положительный параметр.

Решением уравнения (1) на $(0,T)$ называется гладкая на $(-\infty,T)$ функция, совпадающая с заданной на $(-\infty,0)$ и удовлетворяющая (1) на $(0,T)$.

Пусть $D_1(p)=\operatorname{Re}D(ip)$, $D_2(p)=\operatorname{Im}D(ip)$, $p\in\mathbf{R}$, где

$$D(p)=p^2+\alpha_1p+\alpha_2+(\beta_1p+\beta_2)k^*(p),\ \ k^*(p)=\int\limits_0^\infty e^{-ps}dk(s).$$

Предположим, что

$$D_i(\omega)=\varepsilon D_{i1}+\varepsilon^2D_{i2}+\dots,\qquad i=1,2,$$

$$(D_1'^2(\omega)+D_2'^2(\omega))^{1/2}=O(1),\ \ (D_1^2(k\omega)+D_2^2(k\omega))^{1/2}=O(1),\qquad k=0,2,\dots,$$

$$\omega=rq^{-1}\nu,$$

где r, g — взаимно-простые числа.

Обозначим $\theta=\psi-rq^{-1}\nu t$.

Рассмотрим следующую задачу: найти гладкие по Фреше операторы u_i, A_i, B_i, $i=\overline{1,m}$, так, чтобы

$$x=a\cos\psi+\varepsilon u_1(a,\psi,\nu t)+\dots+\varepsilon^m u_m(a,\psi,\nu t), \tag{3}$$

в котором a, θ определяются из системы

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\varepsilon A_1(a,\theta)+\dots+\varepsilon^mA_m(a,\theta),\\ \frac{d\theta}{dt}&=\omega-rq^{-1}\nu+\varepsilon B_1(a,\theta)+\dots+\varepsilon^mB_m(a,\theta),\end{aligned} \tag{4}$$

являлось ε^{m+1}-решением (1).

Подставив (3), (4) в (1), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\omega^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial t}\omega+\alpha_1\frac{\partial}{\partial\psi}\omega+\alpha_1\frac{\partial}{\partial t}+\alpha_2\right)u_1(a(t),\psi(t),\nu t)+$$

$$+\left(\beta_1\frac{\partial}{\partial\psi}\omega+\beta_1\frac{\partial}{\partial t}+\beta_2\right)\int\limits_0^\infty u_1(a(t-s,\psi(t-s),\nu(t-s))\,dk(s)+$$

$$+[a(t)D_{11}+D_1'(\omega)a(t)B_1(a,\theta)(t)+D_2'(\omega)A_1(a,\theta)(t)]\cos\psi(t)+$$

$$+[-a(t)D_{21}-D_2'(\omega)a(t)B_1(a,\theta)(t)+D_1'(\omega)A_1(a,\theta)(t)]\sin\psi(t)=$$

$$=F_1(a(t),\psi(t),\nu t),\tag{5}$$

где

$$F_1(a(t),\psi(t),\nu t)=g_1(\nu t,a(t)\cos\psi(t),-a(t)\omega\sin\psi(t))+$$

$$+\int\limits_0^\infty g_2(\nu(t-s),a(t-s)\cos\psi(t-s),\ -a(t-s)\omega\sin\psi(t-s))\,dk(s).\tag{6}$$

Пусть

$$g_j(\nu t,a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)=g^j(a,\psi,\nu t)=\sum_{n,m}g^j_{nm}(a)\,e^{i[n\nu t+m\psi]},\quad j=1,2.$$

Из (4) следует справедливость равенства

$$\psi(t-s)=\psi(t)-\omega s+\varepsilon\ldots.\tag{7}$$

Задача (5) вместе с условием (7) имеет следующее ε-приближенное решение

$$u_1(a(t),\psi(t),\nu t)=\sum_{nq+(m\pm1)r\neq0}\frac{g^1_{nm}(a(t))}{D(i(n\nu+m\omega))}e^{i[n\nu t+m\psi(t)]}+$$

$$+\int\limits_0^\infty\sum_{nq+(m\pm1)r\neq0}\frac{g^2_{nm}(a(t-s))}{D(i(n\nu+m\omega))}e^{i[n\nu(t-s)+m\psi(t-s)]}dk(s),$$

$$A_1(a,\theta)=\frac{(-D_{11}a+G_1(a,\theta))D_1'(\omega)-(D_{21}a+G_2(a,\theta))D_2'(\omega)}{D_1'^2(\omega)+D_2'^2(\omega)},$$

$$B_1(a,\theta)=\frac{(-D_{11}a+G_1(a,\theta))D_1'(\omega)-(D_{21}a+G_2(a,\theta))D_2'(\omega)}{D_1'^2(\omega)+D_2'^2(\omega)},$$

где

$$G_1(a,\theta)(t)=\sum_\sigma e^{iq\sigma\theta(t)}\cdot(2\pi)^{-2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g^1(a(t),\psi,\theta)\,e^{-iq\sigma\theta}\cos\psi\,d\theta d\psi+$$

$$+\int\limits_0^\infty\sum_\sigma e^{iq\sigma\theta(t-s)}\Big[\cos\omega s\cdot(2\pi)^{-2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g^2(a(t-s),\psi,\theta)\,e^{iq\sigma\theta'}\cos\psi\,d\theta d\psi-$$

$$-\sin\omega s\cdot(2\pi)^{-2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g^2(a(t-s),\psi,\theta)\,e^{iq\sigma\theta'}\sin\psi\,d\theta d\psi\Big]\,dk(s),$$

$$G_2(a,\theta)(t)=\sum_\sigma e^{iq\sigma\theta(t)}\cdot(2\pi)^{-2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g^1(a(t),\psi,\theta)\,e^{-iq\sigma\theta'}\sin\psi\,d\theta d\psi+$$

$$+\int\limits_0^\infty\sum_\sigma e^{iq\sigma\theta(t-s)}\Big[\sin\omega s\cdot(2\pi)^{-2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g^2(a(t-s),\psi,\theta)\,e^{-iq\sigma\theta}\cos\psi\,d\theta d\psi+$$

$$+\cos\omega s\cdot(2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2(a(t-s),\psi,\theta)\,e^{-iq\sigma\theta'}\sin\psi\, d\theta\, d\psi\Big]\,dk(s),$$

$$\theta'=\psi-rq^{-1}\theta.$$

Вид уравнения относительно u_2, A_2, B_2 совпадает с (9). Используя (7), находим, как и в предыдущем случае, ε-приближенное решение этого уравнения. Поступая так и далее, решим рассматриваемую задачу по определению u_i, A_i, B_i, $i=\overline{1,m}$. Возникающие здесь трудности по решению уравнений относительно u_i, A_i, B_i, начиная с $i=2$, связаны с представлением правых частей, зависящих от найденных u_k, A_k, B_k, $k=\overline{1,\ i-1}$, и учитывающих приближенный характер решений предыдущих уравнений. Отметим инвариантность пространства постоянных функций для операторов A_i, B_i, $i=\overline{1,\ m}$. Для исследования устойчивости состояний равновесия системы (4), построения приближенных решений можно использовать метод замораживания [2].

В качестве примера рассмотрим уравнение [3]

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega_0^2\left(x(t)-\int_0^\infty x(t-s)R(s)\,ds\right)=\omega_0^2Q\cos\nu t\,x(t)-$$

$$-2\delta\frac{dx(t)}{dt}-v_1x^3(t)+v_2\int_0^\infty x^3(t-s)R(s)\,ds,\tag{8}$$

в котором $R(t)=Ae^{-\beta t}\cdot t^{\alpha-1}$, $0<\alpha<1$, $A>0$, $\beta>0$, слагаемые правой части являются малыми по сравнению с левой частью. Для уравнения (8) согласно введенным обозначениям

$$D_1(p)=-p^2+\omega_0^2((1-A(p^2+\beta^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\operatorname{arctg}p\cdot\beta^{-1})),$$

$$D_2(p)=\omega_0^2A(p^2+\beta^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\alpha)\sin(\alpha\operatorname{arctg}p\cdot\beta^{-1})).$$

Предположим, что ω_0^2 и параметры R таковы, что существует $\omega>0$ такое, что $(D_0^2(\omega)+D_2^2(\omega))^{1/2}$ имеет тот же порядок малости, что и коэффициенты правой части (8). Если $\omega_0^2A\Gamma(\alpha)$ малая величина, то естественно принять $\omega=\omega_0$. Этот случай рассмотрен в [3]. Рассматриваемые далее предположения означают, что $\omega_0^2A\Gamma(\alpha+1)$ имеет порядок малости правой части (8), а $\omega_0^2A\Gamma(\alpha)$ не является малой величиной. Пусть $D_2'(\omega)$ и $D_2(\omega)$ имеют одинаковый порядок малости по отношению к коэффициентам правой части (8), а $D_1'(\omega)$ не является малой величиной. Как и в [3], рассмотрим случай $\omega\approx\nu/2$. В окрестности решения $x=a\cos(\omega t+\varphi_0)$ невозмущенного уравнения находим в улучшенном первом приближении

$$x(t)=a(t)\cos\psi(t)+\frac{\omega_0^2a(t)Q}{2}\cdot\frac{\cos(\nu t+\psi(t))}{D_1(\nu+\omega)}+$$

$$+\frac{v_2}{4D_1(3\omega)}\int_0^\infty a^3(t-s)\cos3\psi(t-s)R(s)\,ds,$$

где a, $\psi=\frac{1}{2}\nu t+\theta$ определяются из системы

$$\frac{da(t)}{dt}=\frac{1}{D_1'(\omega)}\left[\frac{1}{2}\omega_0^2a(t)\sin2\theta(t)+\delta a(t)\omega+aD_2(\omega)\right],$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt}=\omega-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{D_1'(\omega)}\left[\frac{\omega_0^2}{2}Q\cos 2\theta(t)-\frac{3}{4}v_1a^2(t)-\right.$$

$$\left.-D_1(\omega)+\frac{3}{4}v_2\int_0^\infty\cos\omega s a^3(t-s)R(s)\,ds\right]. \qquad (9)$$

Стационарные резонансные a_0, θ_0 амплитуды колебаний и расстройки приближенно можно найти как состояния равновесия полученной системы. Стационарные a_0 определяются из соотношения

$$a_0^2=\frac{4D_1'(\omega)}{3(v_1-v_2R_c(\omega))}\left(\omega-\frac{\nu}{2}-\frac{D_1(\omega)}{D_1'(\omega)}\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{1}{2D_1'(\omega)}\sqrt{\omega_0^4Q^2-4(\delta\omega+D_2^2(\omega)\,\omega_0^2Q)}\right). \qquad (10)$$

С помощью (10) можно построить амплитудно-частотные характеристики. Возможен также и несколько иной подход. Исходя из системы, полученной путем применения метода замораживания к системе (9), сопоставим уравнению (8) уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2(1-h\cos\nu_1 t)\,x+2\delta_1\frac{dx}{dt}+\gamma x^3=0, \qquad (11)$$

где

$$h=\frac{2\omega_0^2Q}{-\omega D_1'(\omega)},\ \nu_1=\nu+2\frac{D_1(\omega)}{D_1'(\omega)},\ \delta_1=\frac{2\omega}{-D_1'(\omega)}\left(2\delta+\frac{D_2(\omega)}{\omega}\right),$$

$$\gamma=\frac{2\omega}{-D_1'(\omega)}(v_1-v_2R_c(\omega)),\ R_c(\omega)=A(\omega^2+\beta^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\operatorname{arctg}\omega\beta^{-1}),$$

которое в первом приближении эквивалентно (8) с точки зрения поведения при резонансе $\omega\approx\nu/2$.

Уравнение (11) исследовано в [1] как при $\gamma\neq 0$, так и $\gamma=0$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.—410 с.
2. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1976.—151 с.
3. *Колтунов М. А., Моргунов Б. И., Петров Л. Ф.* Исследования резонансных колебаний короткой вязкоупругой цилиндрической оболочки.— Механика композит. материалов, 1979, № 1, с. 106—109.

Симферопольский
государственный университет

Поступила в редакцию
13.04.1981 г.