УДК 517.5

Б. В. Винницкий

Об условиях сходимости последовательностей в некоторых пространствах аналитических функций

Пусть $\Phi(z)$ — целая функция с тейлоровскими коэффициентами $c_n \neq 0$; $M_\Phi(r) = \max_{|z|=r} |\Phi(z)|$; (δ_n) — последовательность комплексных чисел; $\varkappa_n = |c_{n-1}/c_n|$; $c_n^* = c_n e^{n\delta_n}$; $\varkappa_n^* = |c_{n-1}^*/c_n^*|$; A_R — пространство функций, аналитических в круге $|z| < R$, с обычной топологией; $A_R'[\Phi]$ — пространство, сопряженное к A_R, реализованное как пространство целых функций $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ таких, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|g_n/c_n|} < R$. Известно, что в $A'_R[\Phi]$ сильная и слабая сходимости эквивалентны сходимости, определенной так: последовательность

$$G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)} z^n \in A'_R[\Phi]$$

сходится к 0, если существует $\overline{R}$, $0 < \overline{R} < R$, такое, что все функции $\widetilde{G}_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n^{(k)}/c_n)\, t^{-n-1}$ аналитичны в замкнутой области $|t| \geqslant \overline{R}$ и $\max\{|\widetilde{G}_k(t)| : |t| \geqslant \overline{R}\} \to 0$ (см. [1, 2]). Отсюда следует, что $G_k(z) \to 0$ (сильно в $A'_R[\Phi]$) тогда и только тогда, когда существуют число $\overline{R}$, $0 < \overline{R} < R$, и последовательность $\varepsilon_k \to 0$, для которых при всех $k \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|g_n^{(k)}| \leqslant \varepsilon_k |c_n| \overline{R}^n. \tag{1}$$

В некоторых случаях сходимость в смысле (1) эквивалентна сходимости, определенной так: последовательность $G_k(z) \in A'_R[\Phi]$ сходится к 0, если существуют число R_*, $0 < R_* < R$, и последовательность $\varepsilon_k^* \to 0$ такие, что при всех $r \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$

$$M_{G_k}(r) \leqslant \varepsilon_k^* M_\Phi(R_* r). \tag{2}$$

Докажем следующее предложение.

Теорема 1. *Для того чтобы условия (1) и (2) были эквивалентны в $A'_R[\Phi]$, $0 < R < \infty$ (в $A'_\infty[\Phi]$), необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\varkappa_n^*$ была не убывающей,*

$$\varkappa_1^* \leqslant \varkappa_2^* \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_n^* \leqslant \ldots, \tag{3}$$

при некоторой стремящейся к 0 (ограниченной) последовательности δ_n.

Заметим, что из доказательства теоремы 1 будет следовать, что (3) выполняется тогда и только тогда, когда при некоторой стремящейся к 0 (ограниченной) последовательности δ_n функция с тейлоровскими коэффициентами c_n^* будет мажорантой Ньютона функции $\Phi(z)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mu_\Phi(r) = \max_{n \geqslant 0}\{|c_n| r^n\}$. Поскольку для любой целой функции $\Phi(z)$ при всех $r \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства

$$\mu_\Phi(r) \leqslant M_\Phi(r) \leqslant K\mu_\Phi((1+\varepsilon) r), \quad K = 1 + 1/\varepsilon, \tag{4}$$

то достаточно рассмотреть случай, когда (3) выполняется для последовательности $\delta_n \equiv 0$, т. е. когда $\varkappa_n$ не убывает. Пусть выполнено (1). Тогда, используя (4), имеем $M_{G_k}(r) \leqslant \varepsilon_k K M_\Phi(\overline{R}(1+\varepsilon) r)$, откуда следует (2). Обратно, пусть выполнено (2). Тогда из неравенств Коши находим

$$\frac{|g_n^{(k)}|}{|c_n|} \leqslant \frac{M_{G_k}(r)}{|c_n| r^n} \leqslant \varepsilon_k^* \frac{M_\Phi(R_* r)}{|c_n| r^n} \leqslant K_1 \varepsilon_k^* \frac{\mu_\Phi(\overline{R} r)}{|c_n| (\overline{R} r)^n} \overline{R}^n, \quad 0 < R_* < \overline{R} < R.$$

Взяв в последних неравенствах $r = \varkappa_n/\overline{R}$ и учитывая, что (см. [3, с. 13]) $\mu_\Phi(\varkappa_n) = |c_n| \varkappa_n^n$, получаем (2).

Необходимость. Достаточно показать, что если (3) не выполняется, то существует последовательность $G_k(z) \in A'_R[\Phi]$, для которой (2) выполняется, а (1) не выполняется. Отметим на плоскости точки $A_n(n; -\ln|c_n|)$ и построим по этим точкам ломаную Адамара (полигон Ньютона, см. [3, с. 15, 4, с. 195, 5, с. 180]). Пусть $y = y(x)$ — уравнение этого полигона. Обозначим через $\alpha(z)$ целую функцию с тейлоровскими коэффициентами $c_n^{(1)} =$

$= \exp(-y(n))$, которая называется мажорантой Ньютона функции $\Phi(z)$. Очевидно, $|c_n| \leqslant c_n^{(1)}$ при всех $n \geqslant 0$ и $|c_n| = c_n^{(1)}$ для бесконечного множества значений n. При этом $|c_n| = c_n^{(1)}$ для тех и только тех значений n, для которых существует $r \geqslant 0$ такое, что $\mu_\Phi(r) = |c_n| r^n$. Отметим также, что последовательность $\varkappa_n^{(1)} = |c_{n-1}^{(1)}/c_n^{(1)}|$ не убывает и при всех $r \geqslant 0$ $\mu_\Phi(r) = \mu_\alpha(r)$. Предположим, что $0 < R < \infty$ и (3) не выполняется. Из этого следует, что не существует последовательности $\delta_n \to 0$ такой, что функция с тейлоровскими коэффициентами c_n^* будет мажорантой Ньютона функции $\Phi(z)$. Иными словами, найдутся число γ, $1 < \gamma < \infty$, и бесконечное множество $N_1 = \{n_k\}_{k=0}^{\infty} \subset N$ такие, что $c_{n_k}^{(1)} > |c_{n_k}| \gamma^{n_k} k \geqslant 0$. Поэтому

$$\max_{k \geqslant 0} \{c_{n_k} | \gamma^{n_k} r^{n_k}\} < \mu_\alpha(r) = \mu_\Phi(r).$$

Возьмем последовательность R_n, $0 < R_n \uparrow R$, и число $m_0 \in N$ такими, чтобы $R_{m_0+k} < \gamma R_{m_0-1}$ при всех $k \geqslant 0$. Положим

$$G_k(z) = \sum_{\substack{n=k \\ n \in N_1}}^{\infty} c_n R_{m_0+k}^n z^n. \tag{5}$$

Имеем

$$M_{G_k}(r) \leqslant \sum_{\substack{n=k \\ n \in N_1}}^{\infty} |c_n| \gamma^n R_{m_0-1}^n r^n \leqslant \mu_\alpha(R_{m_0} r) \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{R_{m_0-1}}{R_{m_0}}\right)^n \leqslant$$

$$\leqslant M_\Phi(R_{m_0} r) \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{R_{m_0-1}}{R_{m_0}}\right)^n.$$

Отсюда следует, что для последовательности (5) условие (2) выполняется. С другой стороны, для любого $\overline{R}$, $0 < \overline{R} < R$, для бесконечного множества значений n и $k | g_n^{(k)} / c_n | = R_{m_0+k}^n > \overline{R}^n$, т. е. (1) не выполняется, что и требовалось доказать. Случай $R = \infty$ рассматривается аналогично. Теорема 1 доказана.

Пусть $\varphi_\Phi^*(x)$ — функция, обратная к функции $\varphi_\Phi(x) = \ln M_\Phi(x)$. Положим

$$q_\Phi^G = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\varphi_\Phi^*(\ln M_G(r))}{r}, \quad \alpha_\Phi^G = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|g_n/c_n|}.$$

Легко видеть, что число q_Φ^G, называющееся Φ-типом функции $G(z)$, можно также определить как точную нижнюю грань чисел τ таких, что при $r \geqslant r_0(\tau)$ выполняется $M_G(r) \leqslant M_\Phi(\tau r)$. Известно [6], что если последовательность $\varkappa_n$ не убывает, то для любой целой функции $G(z)$ $q_\Phi^G = \alpha_\Phi^G$.

Аналогично теореме 1 доказывается следующее предложение.

Теорема 2. *Для того чтобы равенство $\alpha_\Phi^G = q_\Phi^G$ было справедливо для любой целой функции $G(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(z)$ удовлетворяла условию* (3) *при некоторой последовательности $\delta_n \to 0$. Для того чтобы для любой целой функции $G(z)$ условия $q_\Phi^G = 0$, $0 < q_\Phi^G < \infty$, $q_\Phi^G = \infty$ были эквивалентны соответственно условиям $\alpha_\Phi^G = 0$, $0 < \alpha_\Phi^G < \infty$, $\alpha_\Phi^G = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(z)$ удовлетворяла условию* (3) *при некоторой ограниченной последовательности δ_n.*

1. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций.— М.: Наука, 1976.—192 с.
2. *Евграфов М. А.* Основные понятия интерполяции целых функций.— М.: Ин-т прикл. математики АН СССР, 1975.—64 с.

3. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2-х т. М.: Наука, 1978.—Т. 2. 431 с.
4. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М.: ГИТТЛ, 1957.—235 с.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1975.—536 с.
6. *Boas R. P., Buck R. P.* Polinomial expansions of analytic functions.—Berlin; Göttingen Heidelberg; Springer, 1958.— 197 p.

Дрогобычский
педагогический институт

Поступила в редакцию
25.05 1981 г.