УДК 517.948.34

А. Н. Вороной

О построении формальных решений линейной системы интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром и переменным запаздыванием

Рассмотрим систему уравнений

$$\varepsilon \frac{dx(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = A(\tau, \varepsilon)\, x(\tau, \varepsilon) + B(\tau, \varepsilon)\, x(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) = \mu \int_0^1 K(\tau, \sigma, \varepsilon) x(\sigma, \varepsilon) d\sigma, \tag{1}$$

где $\Delta(\tau)$ — положительная для всех $\tau \in [0; 1]$ скалярная функция; $x(\tau, \varepsilon)$ — искомый n-мерный вектор; $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$, $K(\tau, \sigma, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка n, допускающие асимптотические разложения в ряды по степеням малого параметра $\varepsilon > 0$

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(\tau)\, \varepsilon^r, \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} B_r(\tau)\, \varepsilon^r, \quad K(\tau, \sigma, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} K_r(\tau, \sigma)\, \varepsilon^r. \tag{2}$$

Вопрос о построении асимптотического решения этой системы в случае, когда произвольный параметр μ совпадает с малым параметром ε, исследован в [1] (если $\mu = 0$, то (1) вырождается в систему дифференциальных уравнений, для которой асимптотические решения получены в [2]). В настоящей работе построение формальных решений системы (1), обладающих асимптотическим свойством, выполнено в предположении, что:

1) μ не является собственным значением ядра вырожденной интегральной системы

$$(A_0(\tau) + B_0(\tau))\, \varphi(\tau) = \mu \int_0^1 K_0(\tau, \sigma)\, \varphi(\sigma)\, d\sigma, \tag{3}$$

т. е. (3) имеет только тривиальное решение;

2) собственному значению параметра μ ядра системы (3) отвечают k линейно-независимых собственных векторов $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_k(\tau)$.

Будем также предполагать, что:

1^0) функция $\Delta(\tau)$ и матрицы $A_r(\tau)$, $B_r(\tau)$, $K_r(\tau, \sigma)$, $r = 0, 1, \ldots$, имеют соответственно на отрезке $[0, 1]$ и в квадрате $R = \{\tau, \sigma \mid 0 \leqslant \tau, \sigma \leqslant 1\}$ непрерывные производные по τ любого порядка;

2^0) элементарные делители матрицы $A_0(\tau)$, соответствующие корням уравнения $\det(A_0(\tau) - \lambda E) = 0$, где E — диагональная матрица, просты на $[0, 1]$;

3^0) $\omega_0(\tau)$ — простой корень характеристического квазиполинома

$$\det(A_0(\tau) + B_0(\tau) \exp(-\Delta(\tau)\omega) - \omega E);$$

4^0) матрица

$$D(\tau, \omega_0(\tau)) = A_0(\tau) + B_0(\tau)\exp(-\Delta(\tau)\omega_0(\tau)) - \omega_0(\tau)E$$

для всех $\tau \in [0; 1]$ имеет по крайней мере один из главных миноров $\Delta_m(\tau, \omega_0(\tau))$ $n-1$-го порядка, отличный от нуля, в котором m, $m = 1, \ldots, n$, не зависит от τ;

5^0) матрица $A_0(\tau) + B_0(\tau)$ неособенна на $[0; 1]$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1^0) — 5^0). Если система интегральных уравнений (3) имеет только нулевое решение, то система интегро-дифференциальных уравнений (1) имеет формальное решение вида*

$$\tilde{x}(\tau, \varepsilon) = u(\tau, \varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_0(\xi)\, d\xi\right) + \mu\int_0^1 p(\tau, \sigma, \varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\sigma \omega_0(\xi)\, d\xi\right)d\sigma, \tag{4}$$

где n-мерные векторы $u(\tau, \varepsilon)$ и $p(\tau, \sigma, \varepsilon)$ представлены формальными рядами

$$u(\tau, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} u_r(\tau)\varepsilon^r, \quad p(\tau, \sigma, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r(\tau, \sigma)\varepsilon^r. \tag{5}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно надлежащим образом определить векторы $u(\tau, \varepsilon)$ и $p(\tau, \sigma, \varepsilon)$.

Пусть $\tilde{x}(\tau, \varepsilon)$ — формальное решение системы. Тогда, подставляя вектор (4) в систему (1), получим тождество

$$\varepsilon\frac{du(\tau, \varepsilon)}{d\tau} - (A(\tau, \varepsilon) - \omega_0(\tau)E)u(\tau, \varepsilon) - B(\tau, \varepsilon)u(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)} \omega_0(\xi)\, d\xi\right) = \mu\int_0^1 \Big(A(\tau, \varepsilon)p(\tau, \sigma, \varepsilon) - K(\tau, \sigma, \varepsilon)u(\sigma, \varepsilon) +$$

$$+ B(\tau, \varepsilon)p(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \sigma, \varepsilon) - \mu\int_0^1 K(\tau, \xi, \varepsilon)p(\xi, \sigma, \varepsilon)\, d\xi - \varepsilon\frac{\partial p(\tau, \sigma, \varepsilon)}{\partial\tau}\Big) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^\sigma \omega_0(\xi)\, d\xi\right)d\sigma. \tag{6}$$

Используя формальные разложения вектора $u(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon)$ и функции $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)} \omega_0(\xi)\, d\xi\right)$ [2]

$$u(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) = a_0(\tau) + \varepsilon a_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^m a_m(\tau) + \ldots, \quad \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)} \omega_0(\xi)d\xi\right) =$$

$$= \exp(-\Delta(\tau)\omega_0(\tau))(1 + \varepsilon b_1(\tau) + \ldots + \varepsilon^m b_m(\tau) + \ldots),$$

где

$$a_i(\tau) = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^k\Delta^k(\tau)\, u_{i-k}^{(k)}(\tau)}{k!}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

$$b_i(\tau) = \sum_{k=1}^{i} \frac{c_{1+k-i}^{k}(\tau)}{k!}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$c_k(\tau) = \frac{(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}(\tau)\,\omega_0^{(k)}(\tau)}{(k+1)!}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

левую часть равенства (6) можно представить как формальный ряд по целым неотрицательным степеням параметра ε. В то же время правая часть (6) не представима в таком виде, поскольку функцию $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\sigma} w_0(\xi)\,d\xi\right)$ невозможно разложить в ряд по целым неотрицательным степеням ε. Поэтому для выполнения тождества (6) потребуем, чтобы выражение, стоящее в скобках под интегралом при экспоненте, тождественно обращалось в нуль

$$A(\tau,\varepsilon)\,p(\tau,\sigma,\varepsilon) - K(\tau,\sigma,\varepsilon)\,u(\sigma,\varepsilon) + B(\tau,\varepsilon)\,p(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\sigma,\varepsilon) -$$

$$-\mu\int\limits_0^1 K(\tau,\xi,\varepsilon)\,p(\xi,\sigma,\varepsilon)\,d\xi - \varepsilon\,\frac{\partial p(\tau,\sigma,\varepsilon)}{\partial\tau} = 0. \qquad (7)$$

Тогда вектор $u(\tau,\varepsilon)$ должен удовлетворять тождеству

$$\varepsilon\,\frac{du(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = (A(\tau,\varepsilon) - \omega_0(\tau)E)\,u(\tau,\varepsilon) + B(\tau,\varepsilon)\,u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)}\omega_0(\xi)\,d\xi\right). \qquad (8)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в соотношении (8), получим уравнения

$$D(\tau,\omega_0(\tau))\,u_0(\tau) = 0, \quad D(\tau,\omega_0(\tau))\,u_r(\tau) = v_r(\tau), \quad r = 1, 2, \ldots, \qquad (9)$$

где

$$v_r(\tau) = \frac{du_{r-1}(\tau)}{d\tau} - \sum_{i=1}^{r} A_i(\tau)\,u_{r-i}(\tau) - \exp(-\Delta(\tau)\,\omega_0(\tau))\times$$

$$\times\left(\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i=0}^{k} B_i(\tau)\,a_{k-i}(\tau)\,b_{r-k}(\tau) + \sum_{k=1}^{r} B_k(\tau)\,a_{r-k}(\tau) + \frac{(-1)^k\Delta^k(\tau)B_0u_{r-k}^{(k)}(\tau)}{k!}\right).$$

Алгоритм определения коэффициентов $u_r(\tau)$, $r = 0, 1, \ldots$, векторного ряда $u(\tau,\varepsilon)$ из уравнений (9), (10) описан в [2]. Отметим при этом, что векторы $u_r(\tau)$, $r = 0, 1, \ldots$, неограниченно дифференцируемы на отрезке $[0; 1]$.

Предполагая, что векторы $p_r(\tau,\sigma)$, $r = 0, 1, \ldots$, имеют непрерывные производные по τ любого порядка в квадрате R (об этом будет сказано ниже), для вектора $p(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\sigma,\varepsilon)$ получим формальное разложение

$$p(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\sigma,\varepsilon) = p_0(\tau,\sigma) + \sum_{r=1}^{\infty}\tilde{p}_r(\tau,\sigma)\,\varepsilon^r, \qquad (10)$$

где

$$\tilde{p}_r(\tau,\sigma) = p_r(\tau,\sigma) + \sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^k\Delta^k(\tau)}{k!}\cdot\frac{\partial^k p_{r-k}(\tau,\sigma)}{\partial\tau^k}, \quad r = 1, 2, \ldots.$$

Тогда из соотношения (7) для определения коэффициентов $p_r(\tau,\sigma)$, $r = 0, 1, \ldots$, ряда $p(\tau,\sigma,\varepsilon)$ получаем бесконечную систему неоднородных систем интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода

$$(A_0(\tau) + B_0(\tau))\,p_r(\tau,\sigma) = \mu\int^1 K_0(\tau,\xi)\,p_r(\xi,\sigma)\,d\xi + g_r(\tau,\sigma), \quad r = 0, 1, \ldots, \qquad (11)$$

где

$$g_0(\tau,\sigma) = K_0(\tau,\sigma)\,u_0(\sigma),$$

$$g_r(\tau, \sigma) = \frac{\partial p_{r-1}(\tau, \sigma)}{\partial \tau} + \sum_{s=1}^{r} K_s(\tau, \sigma) u_{r-s}(\sigma) - A_s(\tau) p_{r-s}(\tau, \sigma) -$$

$$- B_s(\tau) \tilde{p}_{r-s}(\tau, \sigma) + \mu \int_0^1 K_s(\tau, \xi) p_{r-s}(\xi, \sigma) d\xi, \ r = 1, 2, \ldots . \quad (12)$$

Обозначая через $\Gamma(\tau, \sigma, \mu)$ резольвенту ядра $(A_0(\tau) + B_0(\tau))^{-1} K_0(\tau, \sigma)$, из (11) находим [3]

$$p_r(\tau, \sigma) = (A_0(\tau) + B_0(\tau))^{-1} g_r(\tau, \sigma) + \mu \int_0^1 \Gamma(\tau, \xi, \mu) (A_0(\xi) + B_0(\xi))^{-1} \times$$

$$\times g_r(\xi, \sigma) d\xi, \quad r = 0, 1, \ldots . \quad (13)$$

Можно показать, что резольвента $\Gamma(\tau, \sigma, \mu)$ имеет непрерывные производные по τ любого порядка в квадрате R, а поэтому из (12) и (13) следует, что и векторы $p_r(\tau, \sigma)$, $r = 0, 1, \ldots$, в R имеют непрерывные производные по τ любого порядка. Теорема доказана.

Пусть μ — собственное значение ядра интегральной системы (3), которому отвечают k собственных векторов $\varphi_i(\tau) = (\varphi_{1i}(\tau), \ldots, \varphi_{ni}(\tau))$, $i = 1, \ldots, k$. Формальное решение системы (1) в этом случае будем искать в виде

$$\tilde{x}(\tau, \varepsilon) = u(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \omega_0(\xi) d\xi\right) + \frac{\mu}{\varepsilon} \int_0^1 p(\tau, \sigma, \varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\sigma \omega_0(\xi) d\xi\right) d\sigma, \quad (14)$$

где векторы $u(\tau, \varepsilon)$ и $p(\tau, \sigma, \varepsilon)$ представлены формальными рядами (5). Легко убедиться в том, что вектор $\tilde{x}(\tau, \varepsilon)$ будет формальным решением системы (1), если вектор $u(\tau, \varepsilon)$ определяется тождеством (8), а вектор $p(\tau, \sigma, \varepsilon)$ тождеством

$$A(\tau, \varepsilon) p(\tau, \sigma, \varepsilon) + B(\tau, \varepsilon) p(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \sigma, \varepsilon) = \mu \int_0^1 K(\tau, \xi, \varepsilon) p(\xi, \sigma, \varepsilon) d\xi +$$

$$+ \varepsilon\left(K(\tau, \sigma, \varepsilon) u(\sigma, \varepsilon) + \frac{\partial p(\tau, \sigma, \varepsilon)}{\partial \tau}\right). \quad (15)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в (15), приходим к бесконечной системе систем интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода

$$(A_0(\tau) + B_0(\tau)) p_0(\tau, \sigma) = \mu \int_0^1 K_0(\tau, \xi) p_0(\xi, \sigma) d\xi; \quad (16)$$

$$(A_0(\tau) + B_0(\tau)) p_r(\tau, \sigma) = \mu \int_0^1 K_0(\tau, \xi) p_r(\xi, \sigma) d\xi + g_r(\tau, \sigma), \quad r = 1, 2, \ldots, \quad (17)$$

в которой

$$g_r(\tau, \sigma) = \frac{\partial p_{r-1}(\tau, \sigma)}{\partial \tau} + \sum_{s=1}^{r} \Big(K_{s-1}(\tau, \sigma) u_{r-s}(\sigma) - A_s(\tau) p_{r-s}(\tau, \sigma) -$$

$$- B_s(\tau) \tilde{p}_{r-s}(\tau, \sigma) + \mu \int_0^1 K_s(\tau, \xi) p_{r-s}(\xi, \sigma) d\xi\Big). \quad (18)$$

Однородную систему (16) удовлетворим, положив

$$p_0(\tau, \sigma) = \sum_{r=1}^{k} \varphi_r(\tau) q_r^{(0)}(\sigma), \quad (19)$$

где $q_r^{(0)}(\sigma)$ — произвольные скалярные функции, определенные на [0, 1].

Рассмотрим вторую систему из (16), (17), которую получим из (17), положив $r = 1$,

$$(A_0(\tau) + B_0(\tau))\, p_1(\tau, \sigma) = \mu \int_0^1 K_0(\tau, \xi)\, p_1(\xi, \sigma)\, d\xi + g_1(\tau, \sigma). \tag{20}$$

С учетом (19) вектор $g_1(\tau, \sigma)$ запишем так:

$$g_1(\tau, \sigma) = \sum_{r=1}^{k} (\varphi_r'(\tau) - A_1(\tau)\varphi_r(\tau) - B_1(\tau)\varphi_r(\tau) +$$

$$+ \mu \int_0^1 K_1(\tau, \xi)\varphi_r(\xi)\, d\xi)\, q_r^{(0)}(\sigma) + K_0(\tau, \sigma)\, u_0(\sigma). \tag{21}$$

Для того чтобы неоднородная система (20) имела решения, необходимо и достаточно [3], чтобы вектор $g_1(\tau, \sigma)$ был ортогонален всем собственным векторам $\psi_i(\tau) = (\psi_{1i}(\tau), \ldots, \psi_{ni}(\tau))$, $i = 1, \ldots, k$, союзной интегральной системы

$$\psi(\tau) = \mu \int_0^1 ((A_0(\sigma) + B_0(\sigma))^{-1} K_0(\sigma, \tau))^* \psi(\sigma)\, d\sigma \tag{22}$$

(звездочкой обозначена операция транспонирования матриц). Условия ортогональности векторов $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau)$ и вектора $g_1(\tau, \sigma)$ с учетом (21) запишем в виде

$$(\psi_s(\tau), g_1(\tau, \sigma)) = f_s(\sigma) - \sum_{r=1}^{k} c_{sr} q_r^{(0)}(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in [0; 1], \quad s = 1, \ldots, k,$$

где

$$f_s(\sigma) = (\psi_s(\tau),\ K_0(\tau, \sigma)\, u_0(\sigma)),$$

$$c_{sr} = \left(\psi_s(\tau),\ A_1(\tau)\varphi_r(\tau) + B_1(\tau)\varphi_r(\tau) - \varphi_r'(\tau) - \mu \int_0^1 K_1(\tau, \xi)\varphi_r(\xi)\, d\xi\right),$$

$$s,\ r = 1, \ldots, k.$$

Будем предполагать, что матрица $C = \| c_{sr} \|_1^k$ неособенная: $\det C \neq 0$. Тогда, определяя функции $q_1^{(0)}(\sigma), \ldots, q_k^{(0)}(\sigma)$ из алгебраической системы линейных уравнений

$$\sum_{r=1}^{k} c_{sr} q_r^{(0)}(\sigma) = f(\sigma), \quad s = 1, \ldots, k,$$

обеспечим ортогональность вектора $g_1(\tau, \sigma)$ собственным векторам $\psi_i(\tau)$ союзной интегральной системы (22), а следовательно, обеспечим разрешимость неоднородной интегральной системы (20). Решения этой системы запишем так:

$$p_1(\tau, \sigma) = \sum_{r=1}^{k} \varphi_r(\tau)\, q_r^{(1)}(\sigma) + (A_0(\tau) + B_0(\tau))^{-1} g_1(\tau, \sigma) +$$

$$+ \mu \int_0^1 \Gamma(\tau, \xi, \mu)(A_0(\xi) + B_0(\xi))^{-1} g_1(\xi, \sigma)\, d\xi.$$

Здесь $q_1^{(1)}(\sigma), \ldots, q_k^{(1)}(\sigma)$ — произвольные функции, определенные на $[0; 1]$, $\Gamma(\tau, \sigma, \mu)$ — резольвента ядра,

$$L(\tau, \sigma) = (A_0(\tau) + B_0(\tau))^{-1} K_0(\tau, \sigma) + \sum_{i=1}^{k} \begin{pmatrix} \overline{\psi}_{1i}(\tau)\, \overline{\varphi}_{1i}(\sigma) & \ldots & \overline{\psi}_{1i}(\tau)\, \overline{\varphi}_{ni}(\sigma) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\psi}_{ni}(\tau)\, \overline{\varphi}_{1i}(\sigma) & \ldots & \overline{\psi}_{ni}(\tau)\, \varphi_{ni}(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются последующие коэффициенты $p_2(\tau, \sigma)$, $p_3(\tau, \sigma)$, ... формального векторного ряда $p(\tau, \sigma, \varepsilon)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1^0)—5^0). Если система интегральных уравнений (3) имеет k линейно-независимых решений $\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_k(\tau)$ и матрица C, составленная из элементов*

$$c_{sr} = \left(\psi_s(\tau),\ A_1(\tau)\varphi_r(\tau) + B_1(\tau)\varphi_r(\tau) - \varphi_r'(\tau) - \mu\int_0^1 K_1(\tau, \xi)\varphi_r(\xi)\,d\xi\right),$$

$$s, r = 1, \ldots, k,$$

где $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau)$ —линейно-независимые решения союзной интегральной системы (22), неособенная, то система интегро-дифференциальных уравнений (1) имеет формальное решение вида

$$\tilde{x}(\tau, \varepsilon) = u(\tau, \varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega_0(\xi)\,d\xi\right) + \frac{\mu}{\varepsilon}\int_0^1 p(\tau, \sigma, \varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\sigma \omega_0(\xi)\,d\xi\right)d\sigma,$$

в котором n-мерные векторы $u(\tau, \varepsilon)$ и $p(\tau, \sigma, \varepsilon)$ представлены формальными рядами (5).

1. *Вороной А. Н.* Асимптотические методы в теории линейных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1979.—16 с.
2. *Шкиль Н. И.* Построение формальных частных решений системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.—Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 1, с. 51—60.
3. *Mendes M. I.* Systemes d'equations integrales et figures derivees des ellipsoides heterogenes en rotation.— Math. pures et appl., 1953, **32**, N 4, p. 335—386.

Кировоградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
12.02. 1981 г.