УДК 517.518.862

М. И. Ганзбург

О многомерных неравенствах типа Бернштейна

В статье получены два варианта многомерных неравенств типа Бернштейна (с точными константами) для целых функций экспоненциального типа.

Пусть R^m — m-мерное евклидово пространство; $x=(x_1, \dots, x_m)$, $y=(y_1, \dots, y_m)$ — точки R^m; $(x, y)=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i$; $|x|=(x, x)^{1/2}$; Z^m — целочисленная решетка R^m; T^m — m-мерный тор; $S_r=\{x \in R^m : |x| \leqslant r\}$; $Q_\sigma=\{x \in R^m : |x_i| \leqslant \sigma,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$; V, V_1, V_2 — центрально-симметричные (относительно нуля) выпуклые компакты в R^m, содержащие окрестность нуля; $V^*=\{y \in R^m : \|y\|_{V^*} \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in V} |(x, y)| \leqslant 1\}$ — поляра V; $\alpha=(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ — мультииндекс; $|\alpha|=\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$; $x^\alpha=x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$; $D^\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}$; $\nabla f(x)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right\}$ — вектор-градиент f; Δ — оператор Лапласа; $\mathbf{C}^m$ — m-мерное комплексное пространство; $\mathbf{C}(\Omega)$ — множество непрерывных на Ω функций f с конечной нормой $\|f\|_{\mathbf{C}(\Omega)}=\sup_\Omega |f|$; $\mathcal{P}_{n,m}$ — множество всех алгебраических многочленов

$P_n(x) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant n} \mathbf{C}_\alpha x^\alpha$ от m переменных степени n; $\mathcal{T}_{\sigma V}$ — множество всех тригонометрических многочленов вида $t(x) = \sum\limits_{l \in \sigma V \cap Z^m} a_l \exp[i(l, x)]$.

Целая функция $f(z)$ имеет экспоненциальный тип V, если $\forall \varepsilon > 0$ существует постоянная A_ε такая, что $\forall z \in \mathbf{C}^m$ $|f(z)| \leqslant A_\varepsilon \exp[(1+\varepsilon) \times \max\limits_{y \in V} \left| \sum\limits_{i=1}^m y_i z_i \right|$. Множество всех целых функций экспоненциального типа V, ограниченных на R^m, обозначим B_V. Подобный класс целых функций рассматривался в работе [1, с. 129]. В случае $m=1$, $V=[-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, класс B_V совпадает с B_σ — классом целых функций экспоненциального типа σ, ограниченных на R^1.

Докажем некоторые неравенства типа Бернштейна, обобщающие следующие соотношения:

$$\max_{|\alpha|=k} \| D^\alpha f \|_{C(R^m)} \leqslant \sigma^k \| f \|_{C(R^m)}, \ f \in B_{Q_\sigma}; \tag{1}$$

$$\sup_{x \in R^m} | \nabla f(x) | \leqslant \sigma \| f \|_{C(R^m)}, \quad f \in B_{S_\sigma}; \tag{2}$$

$$\| \Delta f \|_{C(R^m)} \leqslant m\sigma^2 \| f \|_{C(R^m)}, \quad f \in B_{S_\sigma}. \tag{3}$$

Неравенства (1) — (3) получены соответственно в работах [2 — 4].

Теорема 1. *Если $f \in B_{\sigma V_1}$, то*

$$\sup_{x \in R^m} \| \nabla f(x) \|_{V_2} \leqslant \sigma \max_{y \in V_1} \| y \|_{V_2} \| f \|_{C(R^m)}, \tag{4}$$

равенство в (4) достигается для функции $\sin[\sigma(y^{(1)}, x)]$, *где* $y^{(1)} \in V_1$ — *точка, для которой* $\| y^{(1)} \|_{V_2} = \max\limits_{y \in V_2} \| y \|_{V_2}$.

В случае $V_1 = V_2 = Q_1$ из (4) следует неравенство (1) при $k=1$; для $V_1 = V_2 = S_1$ из (4) получаем соотношение (2).

Замечание 1. Неравенство (4) асимптотически точно на классе $\mathcal{T}_{\sigma V_1}$ при $\sigma \to \infty$. Действительно, для функции $f_0(x) = \sin(l, x) \in \mathcal{T}_{\sigma V_1}$, где l — ближайшая к $\sigma y^{(1)}$ точка из $Z^m \cap \sigma V_1$, имеем

$$\sup_{x \in R^m} \| \nabla f_0(x) \|_{V_2} \geqslant \sigma \| y^{(1)} \|_{V_2} - C_0,$$

где C_0 — постоянная, не зависящая от σ.

Положим $D_k = \left(\sum\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant m} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)^k$, где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^m$ — положительно определенная симметричная матрица, и пусть $V_A = \{x \in R^m : (Ax, x) \leqslant 1\}$.

Теорема 2. *Если $f \in B_{\sigma V_A}$, то*

$$\| D_k f \|_{C(R^m)} \leqslant (m\sigma^2)^k \| f \|_{C(R^m)}, \tag{5}$$

равенство в (5) при $k=1$ достигается для функции $f_1(x) = \cos[\sigma(A^{-1}x, x)^{1/2}]$.

В случае $D_k = \Delta$, $V_A = S_1$ из (5) получаем неравенство (3). Частные случаи теорем 1, 2 приведены без доказательств в [5].

Неравенства (1)—(3) — простые следствия соответствующего одномерного результата, но доказать соотношения (4), (5) таким способом не удается. Для их доказательства применяется метод сведения неравенств типа Бернштейна к неравенствам типа В. А. Маркова для коэффициентов алгебраических многочленов (см., напр., [6, с. 79]). Основой предложенного метода является следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть D — линейный дифференциальный оператор конечного порядка с коэффициентами из $C(R^m)$. Тогда для любого $q > 1$ спра-*

ведливо неравенство

$$\sup_{f\in B_V}\frac{\|Df\|_{C(R^m)}}{\|f\|_{C(R^m)}}\leqslant\sup_n\sup_{P_n\in\mathcal{P}_{n,m}}\frac{|DP_n(0)|}{\|P_n\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}}. \tag{6}$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $q>1$ и произвольной функции f существует последовательность многочленов $P_n\in P_{n,m}$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|f-P_n\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}+\|D(f-P_n)\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}\right)=0,\quad f\in B_V. \tag{7}$$

В работе [7] (см. лемму 7) доказано существование последовательности многочленов $P_n\in\mathcal{P}_{n,m}$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что при $q>1$

$$\|f-P_n\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}\leqslant C_1\exp(an)\|f\|_{C(R^m)}, \tag{8}$$

где $C_1<\infty$, $a<0$ — постоянные, зависящие лишь от m и q.

Из многомерного неравенства А. А. Маркова (см., напр., [8]) и (8) получаем

$$\|D(f-P_n)\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\|D(P_k-P_{k+1})\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{k=n}^{\infty}k^N\|P_k-P_{k+1}\|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}\leqslant C_3\exp(a_1n)\|f\|_{C(R^m)}, \tag{9}$$

где C_2, C_3, N и $a_1<0$ — постоянные, зависящие лишь от V, q, D. Из неравенств (8), (9) следует соотношение (7).

Пусть $f\in B_V$, $\varepsilon\in(0, 1/2)$ — фиксированное число и $x_0\in R^m$ — точка, для которой $\|Df\|_{C(R^m)}<(1+\varepsilon)|Df(x_0)|$. Тогда в силу неравенства (7) для любого $q>1$ существует целое s и многочлен $P_s\in\mathcal{P}_{s,m}$ такие, что

$$\frac{\|Df\|_{C(R^m)}}{\|f\|_{C(R^m)}}=\frac{\|Df_{x_0}\|_{C(R^m)}}{\|f_{x_0}\|_{C(R^m)}}\leqslant\frac{(1+2\varepsilon)|DP_s(0)|}{(1-2\varepsilon)\|P_s\|_{C\left(\frac{sV^*}{q}\right)}}, \tag{10}$$

где $f_{x_0}(x)=f(x_0-x)$. В силу произвольности выбора $\varepsilon>0$ из (10) следует справедливость неравенства (6).

В ряде случаев эффективную оценку правой части соотношения (6) можно получить с помощью следующего результата.

Лемма 2. *Пусть $P_n\in\mathcal{P}_{n,m}$ и $P_{n,k}$ — k-однородная часть P_n, $P_n=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}$. Тогда $\forall x\in R^m$*

$$|P_{n,k}(x)|\leqslant\frac{\|x\|_{V^*}^k}{k!}\|P_n\|_{C(nV^*)},\quad k=0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Доказательство. Обозначив сужение многочлена P_n на прямую l, проходящую через нуль и x, $Q_n(\tau)=\sum_{k=0}^{n}b_k\tau^k$, $\tau\in l$, имеем $Q_n\in\mathcal{P}_{n,1}$. Из неравенства В. А. Маркова [6, с. 79] и соотношения $\|x\|_{V^*}=\frac{2|x|}{|V^*\cap l|}$ ($|V^*\cap l|$ — длина отрезка $V^*\cap l$) получаем

$$|P_{n,k}(x)|=|b_k\tau^k|\leqslant\frac{\|x\|_{V^*}^k}{k!}\max_{nV^*\cap l}|Q_n|\leqslant\frac{\|x\|_{V^*}^k}{k!}\|P_n\|_{C(nV^*)}.$$

Лемма доказана.

Следующий результат, используемый при доказательстве теоремы 1, представляет и самостоятельный интерес.

Положим $D_{k,y} = (y, \nabla)^k$, где y — фиксированная точка из R^m.

Лемма 3. *Если $f \in B_{\sigma V}$, то*

$$\| D_{k,y} f \|_{C(R^m)} \leqslant \sigma^k \| y \|_{V^*}^k \| f \|_{C(R^m)}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Равенство в (12) достигается для функции $\cos\left[\sigma(y^{(2)}, x) + \frac{k\pi}{2}\right]$, *где $y^{(2)} \in V$ — точка, для которой $(y^{(2)}, y) = \| y \|_{V^*}$.*

Доказательство. Пусть $P_n(x) = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant n} c_\alpha x^\alpha$ — произвольный многочлен из $\mathcal{P}_{n,m}$. Используя лемму 2, имеем при $q > 1$

$$| D_{k,y} P_n(0) | = k! \left| \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha \right| \leqslant q^k \sigma^k \| y \|_{V^*}^k \| P_n \|_{C\left(\frac{nV^*}{q}\right)}. \tag{13}$$

В силу произвольности $q > 1$ из неравенств (6), (13) следует соотношение (12). Лемма доказана.

В случае $V = Q_\sigma$ неравенство (12) получено в [2] в качестве следствия соотношения (1).

Доказательство теоремы 1. Используя лемму 3 при $k = 1$, имеем

$$\sup_{x \in R^m} \| \nabla f(x) \|_{V_2} = \sup_{x \in R^m} \sup_{y \in V_2^*} |(y, \nabla f(x))| \leqslant \sigma \max_{y \in V_2^*} \| y \|_{V_1^*} \| f \|_{C(R^m)}.$$

Воспользовавшись теперь соотношением $\max\limits_{y \in V_2^*} \| y \|_{V_1^*} = \max\limits_{y \in V_1} \| y \|_{V_2}$, получаем справедливость теоремы 1.

Замечание 2. В случае $V_2 = S_1$ неравенство (4) является следствием одномерного неравенства Бернштейна и следующего утверждения: сужение $f \in B_{\sigma V}$ на любую прямую в R^m принадлежит $B_{\frac{\sigma D(V)}{2}}$, где $D(V)$ — диаметр V.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать (5) для $k = 1$ и $\sigma = 1$. Сначала докажем справедливость неравенства $(q > 1)$

$$| D_1 P_n(0) | \leqslant q^2 m \| P_n \|_{C\left(\frac{nV_A^*}{q}\right)} \quad \forall P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \tag{14}$$

Так как существует линейное преобразование $y = cx$, переводящее $V_A^* = V_{A^{-1}}$ в шар S_1 и такое, что $D_1 P_n(x) = \Delta P_n(cx)$, то достаточно доказать (14) для $D_1 = \Delta$ и $V_{A^{-1}} = S_1$. Воспользовавшись инвариантностью оператора Лапласа относительно вращений, для любого $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ получаем существование многочлена $Q_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ такого, что

$$\| Q_n \|_{C\left(\frac{nS_1}{q}\right)} = \| P_n \|_{C\left(\frac{nS_1}{q}\right)}, \quad | \Delta P_n(0) | = | \Delta Q_n(0) | = 2 \left| \sum_{i=1}^m d_i \right|,$$

где $\sum\limits_{i=1}^m d_i x_i^2$ — 2-однородная часть Q_n. Из неравенства (11) при $k = 2$ имеем

$$| \Delta P_n(0) = 2 \left| \sum_{i=1}^m d_i \right| \leqslant q^2 m \| Q_n \|_{C\left(\frac{nS_1}{q}\right)}.$$

Неравенство (14) доказано.

В силу произвольности $q > 1$ справедливость соотношения (5) следует из неравенств (6), (14).

Далее,

$$\| D_1 f_1 \|_{C(R^m)} \geqslant \frac{\sigma^2}{2} | D_1 (A^{-1} x, x) |_{x=0} = m\sigma^2.$$

Кроме того, носитель преобразования Фурье f_1 (в смысле теории обобщенных функций) принадлежит σV_A, так что $f_1 \in B_{\sigma V_A}$. Теорема доказана.

Из интерполяционной формулы для тригонометрических многочленов (см. следствие 3 из [9]) и теоремы 2 вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть $\varphi \geqslant 0$ — выпуклая не убывающая на $[0, \infty)$ функция. Тогда для любого тригонометрического многочлена $t \in \mathcal{T}_{\sigma V_A}$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{T^m} \varphi\left[\frac{D_k t(x)}{(m\sigma^2)^k}\right] dx \leqslant \int\limits_{T^m} \varphi[t(x)]\, dx. \qquad (15)$$

В случае $m = 1$ неравенство (15) доказано в [10, с. 21], а для $\varphi(\tau) = \tau^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $D_k = \Delta$ и произвольной функции из B_{S_σ} неравенство типа (15) получено в [4].

1. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.—332 с.
2. *Бернштейн С. Н.* О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных.— Собр. соч.: В 4-х т. М.: Изд-во АН СССР, 1954, т. 2, с. 437—441.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М. : Наука, 1977.—456 с.
4. *Камзолов А. И.* Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах.— Мат. заметки, 1974, **15**, № 6, с. 967—978.
5. *Ганзбург М. И.* Теоремы Джексона и Бернштейна в R^m.— Успехи мат. наук, 1979, **34**, № 1, с. 225—226.
6. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.—624 с.
7. *Ганзбург М. И.* О многомерных теоремах Джексона.— Сиб. мат. журн., 1981, **22**, № 2, с. 74—83.
8. *Wilhelmsen D. R.* A Markov inequality in several dimensions.— J. Approxim. Theory, 1974, **11**, № 3, p. 216—220.
9. *Rivlin T. J., Shapiro H. S.* A unified approach to certain problems of approximation and minimization.— J. Soc. Indust. Appl. Math., 1961, **9**, № 4, p. 670—697.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т.— М. : Мир, 1965.—Т. 2. 538 с.

Всесоюзный научно-исследовательский проектно-конструкторский технологический институт механизации труда в черной металлургии и ремонтно-механических работ

Поступила в редакцию 16.03. 1981 г.