УДК 517.94

В. К. Григоренко

Построение решений системы линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой $z = \infty$

$$dw/dz = z^r A(z) w, \tag{1}$$

где r — неотрицательное целое число, а $A(z)$ — $(p \times p)$-матрица, которая представима в виде ряда

$$A(z) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-s} A_s, \tag{2}$$

w — p-мерный вектор.

В работах [1—5] система (1) рассматривалась при простых и кратных корнях характеристического уравнения

$$\det [A_0 - \lambda E] = 0. \tag{3}$$

При этом существенным было условие, чтобы корни уравнения

$$\det D(\omega) = \det \begin{bmatrix} \omega - \{C_1\}_{s_1,1} & -\{C_1\}_{s_1,s_1+1} & \cdots & -\{C_1\}_{s_1,l_{r_1-1}+1} \\ -\{C_1\}_{2s_1,1} & \omega - \{C_1\}_{2s_1,s_1+1} & \cdots & -\{C_1\}_{2s_1,l_{r_1-1}+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\{C_1\}_{p,1} & -\{C_1\}_{p,s_1+1} & \cdots & \omega - \{C_1\}_{p,l_{r_1-1}+1} \end{bmatrix} = 0, \tag{4}$$

где $\{C_1\}_{s_1,1}$, $\{C_1\}_{s_1,s_1+1}, \ldots, \{C_1\}_{p,l_{r_1-1}+1}$ — соответственные элементы матрицы $C_1 = T^{-1}A_1T$, T — преобразующая матрица для матрицы A_0; $l_{r_1-1} = s_1 + s_2 + \ldots + s_{r_1-1}$, $s_1, s_2, \ldots, s_{r_1}$ — кратности элементарных делителей, которые отвечают кратному корню λ_0 уравнения (3), $s_1 = s_2 = \ldots = s_{r_1}$ и $\sum_{i=1}^{r_1} s_i = p$, были простыми и ненулевыми.

Здесь предложен метод построения решений системы (1) при условии, что уравнение (4) имеет нулевые корни.

Предполагаем, что выполняются такие условия:

1) характеристическое уравнение (3) имеет корень λ_0 кратности p;

2) корню λ_0 соответствует $r_1 \geqslant 2$ кратных элементарных делителей $(\lambda - \lambda_0)^{s_1}$, $[\lambda - \lambda_0)^{s_2}, \ldots, (\lambda - \lambda_0)^{s_{r_1}}$, где $\sum_{i=1}^{r_1} s_i = p$;

3) $s_1 = s_2 = \ldots = s_{r_1}$, причем $s_j > 2$, $j = 1, 2, \ldots, r_1$;

4) уравнение (4) имеет простой нулевой корень $\omega_1 = 0$;

5) матрица

$$K = \begin{bmatrix} [-\{C_1\}_{s_1-1,1} - \{C_1\}_{s_1,2}] \ [-\{C_1\}_{s_1-1,s_1+1} - \{C_1\}_{s_1,s_1+2}] \cdots \\ \cdots [-\{C_1\}_{s_1-1,l_{r_1-1}+1} - \{C_1\}_{s_1,l_{r_1-1}+2}] \\ [-\{C_1\}_{2s_1-1,1} - \{C_1\}_{2s_1-1,s_1+1}] \cdots [-\{C_1\}_{2s_1-1,l_{r_1-1}+1} - \\ - \{C_1\}_{2s_1,l_{r_1-1}+2}] \\ \cdots \\ [\{C_1\}_{p-1,1} - \{C_1\}_{p,2}] \cdots [-\{C_1\}_{p-1,l_{r_1-1}+1} - \\ - \{C_1\}_{p,l_{r_1-1}+2}] \end{bmatrix} \tag{5}$$

такая, что

$$((K \cdot \rho^{(0)}) \cdot \overline{y}) \neq 0, \tag{6}$$

где $\rho^{(0)}$ — нетривиальное решение системы $D(0)\,\rho_0 = 0$, (7), а $\overline{y}$ — вектор-решение союзной системы, соответственной системе (7).

Теорема 1. *Если выполняются условия 1)—5), то система дифференциальных уравнений (1) имеет формальное частное решение вида*

$$w(z) = u(x) \exp\left(-\int x^{-(r+2)}\lambda(x)\,dx\right), \tag{8}$$

где s_1-мерный вектор $u(x)$ и скалярная функция $\lambda(x)$ имеют формальные разложения в ряды

$$u(x) \sum_{s=0}^{\infty} x^s u_s, \quad \lambda(x) = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \lambda_s, \quad x = z^{-1}. \tag{9}$$

Доказательство. С помощью подстановки $z = x^{-1}$ сводим систему (1) к такой:

$$x^{r+2}dw/dx = -A(x^{-1})\,w. \tag{10}$$

Предполагая, что (8), (9) — решение системы (10), имеем

$$[A(x) - \lambda(x)E]\,u(x) = -x^{r+2}u'(x) \tag{11}$$

(штрих обозначает дифференцирование по x). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в тождестве (11), получаем

$$[A_0 - \lambda_0 E]\,u_0 = 0, \quad s = 0; \tag{12}$$

$$[A_0 - \lambda_0 E]\,u_s = \sum_{i=0}^{s-1} u_i\lambda_{s-i} - \sum_{i=1}^{s} A_i u_{s-i} - (s-r-1)\,u_{s-r-1}, \quad s \geqslant 1. \tag{13}$$

Вводя в рассмотрение векторы

$$q_s = T^{-1}us, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

представим уравнения (12) и (13) в виде

$$Iq_0 = 0; \tag{15}$$

$$Iq_s = \sum_{i=0}^{s-1} q_i\lambda_{s-i} - C_1q_{s-1} + \varphi_s, \quad s \geqslant 1, \tag{16}$$

где

$$\varphi_s = T^{-1}\sum_{i=r}^{s} A_iTq_{s-i} - (s-r-1)\,q_{s-r-1}; \tag{17}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & & & & 0 \\ & I_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & I_{r_1} \end{bmatrix}, \quad I_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} - (s_j \times s_j). \tag{18}$$

Согласно (18), соотношения (15) и (16) распадаются на r_1 уравнений

$$I_jq_{0j} = 0; \tag{19}$$

$$I_jq_{sj} = \sum_{i=0}^{s-1} q_{ij}\lambda_{s-i} - \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn}q_{(s-1)n} + \varphi_{sj}, \tag{20}$$

где C_{1jn} — матрицы размеров $(s_j \times s_n)$, образованные из элементов матрицы C_1, j, $n = 1, 2, \ldots, r_1$.

Из (19) следует, что все компоненты векторов q_{0j}, кроме первых, равны нулю. Первые компоненты этих векторов определим из уравнения (20) при $s = 1$. Имеем

$$I_jq_{1j} = q_{0j}\lambda_1 - \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn}q_{0n}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r_1. \tag{21}$$

Умножая (21) слева на $I_j^{s_j-1}$ и учитывая (19), получаем

$$-I_j^{s_j-1}\sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn}q_{0n} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r_1. \tag{22}$$

Взяв в каждом из векторных уравнений системы (22) первые скалярные уравнения, имеем

$$D(0)\,\rho_0 = 0, \tag{23}$$

где ρ_0 — r_1-мерный вектор, образованный из первых компонент векторов q_{0j}.

Согласно условию (4), система (23) имеет ненулевое решение. Этим векторы q_{0j} определены полностью.

Определяя векторы q_{1j}, положим в (20) $s = 2$.

$$I_j q_{2j} = q_{0j}\lambda_2 + q_{1j}\lambda_1 - \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn} q_{1n} + \varphi_{2j}, \quad j = \overline{1, r_1}. \tag{24}$$

Используя приведенные выше рассуждения, получаем

$$D(0)\rho_1 = -K\rho_0\lambda_1 + f_1, \tag{25}$$

где ρ_1 — r_1-мерный вектор, образованный из первых компонент векторов ρ_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$, а f_1 — известный r_1-мерный вектор, образованный из первых компонент векторов

$$-I_j^{s_j-1}\varphi_{2j} + I_j^{s_j-1} \sum_{n=1}^{r_1}{}' C_{1jn} q_{1n} \tag{26}$$

(штрих обозначает, что в сумме отброшены величины, которые имеют первые компоненты векторов q_{sn}, а также величины, содержащие числа λ_s, $s = 1, 2, \ldots$).

Для разрешимости системы (25) необходимо и достаточно условие

$$((-K\rho_0\lambda_1 + f_1)\cdot\bar{y}) = 0. \tag{27}$$

Отсюда на основании (6) находим

$$\lambda_1 = (f_1 \cdot \bar{y})/(K\rho_0 \cdot \bar{y}). \tag{28}$$

Из системы (25) определяем вектор ρ_1 или первые компоненты векторов q_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$. Последующие компоненты этих векторов однозначно определяются из системы (21).

Аналогично определяются из уравнения (20) векторы q_{2j}, q_{3j}, … и числа λ_1, λ_2, … .

Заметим, что теорема 1 для корня $\omega_1 = 0$ позволяет получить лишь одно формальное решение вида (8), (9). Для получения еще $s_1 - 1$ решений используется такая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия 1)—5), система дифференциальных уравнений (1) имеет формальное решение*

$$w(z) = v(\mu)\exp\left(-\int (s_1 - 1)\,\mu^{-(s_1+1)s_1+r}\gamma(\mu)\,d\mu\right), \tag{29}$$

где s_1-мерный вектор $v(\mu)$ и скалярная функция $\gamma(\mu)$ имеют формальные разложения

$$v(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s v_s, \quad \gamma(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \gamma_s, \; \mu = \sqrt[s_1-1]{x}. \tag{30}$$

Доказательство. Подстановкой $\mu = \sqrt[s_1-1]{x}$ сводим (10) к системе

$$\frac{1}{s_1 - 1}\,\mu^{(r+1)s_1+r}\,dw/d\mu = -A(\mu^{s_1-1})\,w. \tag{31}$$

Предполагая, что (29), (30) — решение системы (32), получаем тождество

$$[A(\mu^{s_1-1}) - \gamma(\mu)E]\,v(\mu) = -\frac{1}{s_1 - 1}\,\mu^{(r+1)s_1-r}v'(\mu). \tag{32}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ^s, получаем уравнения

$$Ig_0 = 0, \quad s = 0; \tag{33}$$

$$Ig_s = \sum_{i=0}^{s-1} g_i\lambda_{s-i} - C_1 g_{s-s_1+1} + \psi_s, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

где

$$g_s = T^{-1} v_s,\ \psi_s =$$

$$= T^{-1}\left[-\sum_{k=1}^{[s/s_1-1]} A_i v_{s-i(s_1-1)} - \frac{s-(r+1)s_1+r+1}{s_1-1} v_{s-(r+1)s_1+r-1}\right] \quad (35)$$

($[s/s_1 - 1]$ — целая часть числа $s/s_1 - 1$).

Согласно (14) получаем

$$I_j g_{0j} = 0; \quad (36)$$

$$I_j g_{sj} = \sum_{i=0}^{s-1} g_i \lambda_{s-i} - \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn} g_{(s+i-s_1)n} + \psi_{sj}, \quad (37)$$

$j = 1, 2, \ldots, r_1$, матрицы C_{1jn}, $j = \overline{1, r_1}$, имеют размеры $(s_j \times s_n)$ и образованы из соответствующих элементов матрицы C_1.

Из (36) определяются все компоненты векторов q_{0j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$, кроме первых. Первые компоненты этих векторов определяются из (37) при $s = s_1 - 1$

$$I_j g_{(s_1-1)j} = \sum_{i=0}^{s_1-2} g_{ij} \lambda_{s_1-1-i} - \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn} g_{0n}. \quad (38)$$

Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, приходим к системе

$$D(0)\rho_0 = 0, \quad (39)$$

из которой определяются первые компоненты векторов g_{0j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$. Определяя векторы g_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$, рассмотрим систему (37) при $s = 1$ и $s = s_1$.

$$I_j g_{1j} = g_{0j} \lambda_1; \quad (40)$$

$$I_j g_{js_1} = \sum_{i=0}^{s_1-2} g_{ij} \lambda_{s_1-i} + g_{(s_1-1)j} \lambda_1 - \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn} g_{1n}. \quad (41)$$

Умножая (41) слева на матрицу $I_j^{s_j-1}$ и учитывая условие 3), получаем

$$I_j^{s_j-1} \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn} g_{1n} = g_{0j} [\lambda_1]^{s_j} - I_j^{s_j-2} \sum_{n=1}^{r_1} C_{1jn} g_{0n} \lambda_1. \quad (42)$$

Взяв первые скалярные уравнения, находим

$$D(0)\bar{\rho}_1 = -\rho_0 [\lambda_1]^{s_1} - K\bar{\rho}_0 \lambda_1, \quad (43)$$

где $\bar{\rho}_1$ — r_1-мерный вектор, образованный из первых компонент векторов g_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$. Для разрешимости системы (43) необходимо и достаточно, чтобы

$$((\bar{\rho}_0 [\lambda_1]^{s_1} + K\bar{\rho}_0 \lambda_1) \cdot \bar{y}) = 0. \quad (44)$$

Так как согласно условию 4)

$$(\bar{\rho}_0 \cdot \bar{y}) = d(\det D(\omega))/d\omega\,|_{\omega=0} \neq 0, \quad (45)$$

то из условия (44) находим

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = \sqrt[s_1-1]{(K\bar{\rho}_0 \cdot \bar{y})/(\bar{\rho}_0 \cdot \bar{y})}. \quad (46)$$

Из системы (43) находим вектор $\bar{\rho}_1$, или первые компоненты векторов g_{1j}, $j = 1, 2, \ldots, r_1$. Последние компоненты векторов g_{1j} определяются из уравнений (40).

Методом математической индукции легко показать, что этим же способом могут быть определены векторы $g_2, g_3, \ldots$ и числа $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$.

П р и м е ч а н и е. Теорема 2 позволяет построить s_1 формальных линейно-независимых решений системы (1), соответствующих корню $\omega_1=0$. Действительно, в силу (6) и (46) λ_1 имеет s_1 различных значений. Подставляя эти значения в (29), получаем s_1 формальных решений, причем значению $\lambda_{11} = 0$ соответствует решение, формальные ряды в котором расположены по целым степеням x.

Рассмотрим случай, когда корню λ_0 уравнения (3) отвечают несколько кратных элементарных делителей, причем их кратности $s_1, s_2, \ldots, s_{r_1}$ удовлетворяют условию $s_1 > s_2 > \ldots > s_{r_1}$. При этом имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 3. *Если выполняются условия 1) и 2) теоремы 1 и условия:* 1^0) $s_1 > s_2 > \ldots > s_{r_1}$;

2^0) *уравнение*

$$\det D_j(\omega_j) = \det \begin{bmatrix} \{C_1\}_{s_1,1} & \{C_1\}_{s_1,s_1+1} & \cdots & \{C_1\}_{s_1,l_{j-1}+1} \\ \{C_1\}_{s_1+s_2,1} & \{C_1\}_{s_1+s_2,s_1+1} & \cdots & \{C_1\}_{s_1+s_2,l_{j-1}+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \{C_1\}_{l_j,1} & \{C_1\}_{l_j,s_1+1} & \cdots & \omega - \{C_1\}_{l_j,l_{j-1}+1} \end{bmatrix} = 0, \quad (47)$$

$\{C_1\}_{s_1,1}, \{C_1\}_{s_1,s_1+1}, \ldots, \{C_1\}_{l_j,l_{j-1}+1}$ — соответствующие элементы матрицы $C_1 = T^{-1}A_1T$, где T — преобразующая матрица для матрицы A_0, имеет простые нулевые корни ω_j; 3^0) матрица

$$K_j = \begin{bmatrix} [\{C_1\}_{s_1-1,1} + \{C_1\}_{s_1,2}] \; [\{C_1\}_{s_1-1,s_1+1} + \{C_1\}_{s_1,s_1+2}] \cdots \\ \cdots [\{C_1\}_{s_1-1,l_{j-1}+1} + \{C_1\}_{s_1,l_{j-1}+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\{C_1\}_{l_{j-1},1} + \{C_1\}_{l_j,2}] \; [\{C_1\}_{l_j-1,s_1+1} + \{C_1\}_{l_j,s_1+2}] \cdots \\ \cdots [\{C_1\}_{l_j-1,l_{j-1}+1} + \{C_1\}_{l_j,l_{j-1}+2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

такая, что

$$(K_j\rho_{j0} \cdot \bar{y}_j) \neq 0, \quad (49)$$

где ρ_{j0} — нетривиальное решение системы

$$D_j(0)\,\rho_{j0} = 0, \quad (50)$$

а $\bar{y}_j$ — вектор-решение союзной системы, соответствующей системе (50), то система дифференциальных уравнений (1) имеет формальное частное решение вида

$$w_j(z) = u_j(x)\exp\left(-\int x^{-(r+2)}\lambda_j(x)\,dx\right), \quad j = \overline{1, r_1},$$

где u_j — s_j-мерные векторы и λ_j — скалярные функции, которые имеют представления

$$u_j(x) = \sum_{s=0}^{\infty} x^s u_{js}, \quad \lambda_j(x) = \sum_{s=0}^{\infty} x^s \lambda_{js}^s, \quad x = 1/z.$$

П р и м е ч а н и е. Теорема 3 дает возможность построить только r_1 линейно-независимых решений. Построение недостающих решений осуществляется с помощью такой теоремы.

Т е о р е м а 4. *Если выполняются условия 1) и 2) теоремы 1 и условия* 1^0) *и* 3^0) *теоремы 3, то система дифференциальных уравнений (1) имеет формальные решения*

$$w_j(z_j) = v_j(\mu_j)\exp\left(-\int (s_j - 1)\,\mu^{-(s_j+1)s_j+r}\gamma_j(\mu_j)\,d\mu_j\right),$$

где s_j-мерные векторы $v_j(\mu_j)$ и скалярная функция $\gamma_j(\mu_j)$ имеют формальные разложения

$$v_j(\mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s v_s,\ \gamma_j(\mu_j) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_j^s; \quad \mu_j = \sqrt[s_j-1]{x}, \quad j = \overline{1, r_1}.$$

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теорем 1 и 2.

1. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.—464 с.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.—460 с.
3. *Turritin H. L.* Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point.— Acta Math., 1955, **93**, p. 27—66.
4. *Шкиль Н. И., Григоренко В. К.* О формальных решениях системы линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1972, № 1, с. 29—34.
5. *Григоренко В. К.* Об асимптотическом разложении решений систем линейных дифференциальных уравнений : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1972.—16 с.

Черкасский
педагогический институт

Поступила в редакцию
27.04. 1981 г.