УДК 517.5

П. В. Задерей

Приближение дифференцируемых функций двух переменных суммами Фурье в среднем

Пусть Δ_p^r, $1 < p < \infty$, множество 2π-периодических по x и y функций $f(x, y)$, которые имеют обобщенные по Соболеву производные до $2r$-го порядка, обладающие тем свойством, что функция

$$\Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f) = \varphi(x, y), \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

суммируема и для ее нормы выполняется неравенство

$$\|\varphi(x, y)\|_p = \left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x, y)|^p\, dxdy\right\}^{1/p} \leqslant 1, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

В случае $p = \infty$ считаем, что $\varphi(x, y)$ измерима, существенно ограничена и ее норма удовлетворяет условию $\|\varphi(x, y)\|_\infty = \operatorname{supvrai} |\varphi(x, y)| \leqslant 1$.

Через $S_{n,m}(f; x, y)$ обозначим прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x, y)$ порядка (mn).

В данной работе изучается поведение верхней грани

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_p^r) = \sup_{f \in \Delta_p^r} \|f(x, y) - S_{m,n}(f; x, y)\|_p \tag{1}$$

при $p = 1$ и $p = \infty$. Для этой величины находим асимптотические равенства, дающие полное решение задачи, которую мы, следуя [1], будем называть задачей Колмогорова—Никольского, заключающуюся в том, что необходимо в явном виде найти функцию $\varphi(m, n)$, для которой

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_p^r) = \varphi(m, n) + o(\varphi(m, n)).$$

Впервые эта задача на классах Δ_p^r рассмотрена в [2]. В частности, там доказано, что при $p = 1$ и $p = \infty$ имеет место равенство

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_p^r) = \frac{16}{\pi^4} \frac{\ln m \ln n}{(m^2 + n^2)^r} + O\left(\frac{\ln m}{m^{2r}} + \frac{\ln n}{n^{2r}}\right).$$

Это равенство дает решение задачи Колмогорова — Никольского, если $c_1 \leqslant m/n \leqslant c_2$, где c_1 и c_2 — положительные константы, так как только в этом случае первый член правой части является главным.

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *При $p = 1$ и $p = \infty$ для произвольных натуральных чисел m и n имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{m,n}(\Delta_p^r) = \frac{16}{\pi^4}\frac{\ln m \ln n}{(m^2+n^2)^r} + \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln m}{m^{2r}} + \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^{2r}} + \\ + O\left(\frac{\ln mn}{(m^2+n^2)^r} + \frac{1}{m^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}\right). \quad (2)$$

Приведем здесь три леммы, которые потребуются нам для доказательства теоремы.

Лемма 1. *Для произвольной функции $f(x, y)$ из класса Δ_∞^r при любых натуральных m и n выполняется равенство*

$$f(0,0) - S_{n,m}(f;\,0,0) = \frac{(-1)^r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,0)\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\cos kt}{k^{2r}}\,dt + \\ + \frac{(-1)^r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(0,z)\sum_{l=n}^{\infty}\frac{\cos lz}{l^{2r}}\,dz - \frac{(-1)^r}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\times \\ \times\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\frac{\cos kt\cos lz}{(k^2+l^2)^r}\,dtdz = \mathcal{I}_m(\varphi) + \mathcal{I}_n(\varphi) - \mathcal{I}_{m,n}(\varphi). \quad (3)$$

Доказательство. Используя представление, полученное в [2], для функций $f(x, y) \in \Delta_p^r$ имеем

$$f(0,0) - S_{m,n}(f;\,0,0) = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{(k^2+l^2)^r}\times \\ \times\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\cos kt\cos lz\,dtdz + \frac{1}{\pi^2}\left(\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{l=n}^{\infty} + \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\right)(-1)^r\times \\ \times\frac{\lambda_{k,l}}{(k^2+l^2)^r}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t,z)\cos kt\cos lz\,dtdz = \mathcal{I}_{m,n}(\varphi) + \mathcal{I}_{m,n}^{(1)}(\varphi) + \mathcal{I}_{m,n}^{(2)}(\varphi). \quad (4)$$

Сумма $\mathcal{I}_{m,n}^{(1)}(\varphi)$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{I}_{m,n}^{(1)}(\varphi) = \sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\lambda_{kl}}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,z)\cos kt\cos lz\,dtdz = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,0)\sum_{k=m}^{\infty}\cos kt\,dt - \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,z)\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty}\cos kt\cos lz\,dtdz.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\mathcal{I}_{m,n}^{(1)}(\varphi) = \mathcal{I}_m(\varphi) - \mathcal{I}_{m,n}(\varphi). \quad (5)$$

Аналогично поступаем с $\mathcal{I}_{m,n}^{(2)}(\varphi)$. Тогда

$$\mathcal{I}_{m,n}^{(2)}(\varphi) = \mathcal{I}_n(\varphi) - \mathcal{I}_{m,n}(\varphi). \quad (6)$$

Из равенств (4) — (6) следует соотношение (3).

Лемма 2. *Для любых натуральных чисел m и n, а также $f(x, y) \in \in \Delta'_\infty$ справедливо равенство*

$$f(0, 0) - S_{m,n}(f; 0, 0) = \frac{(-1)^{r+1}}{\pi} \frac{2}{m^{2r}} \int_0^\pi \varphi(t, 0) \mathcal{D}_{m-1}(t)\, dt +$$

$$+ \frac{(-1)^{r+1}}{\pi} \frac{2}{n^{2r}} \int_0^\pi \varphi(0, z) \mathcal{D}_{n-1}(z)\, dz +$$

$$+ \frac{(-1)^{r+1}}{\pi^2} \frac{4}{(m^2+n^2)^r} \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi(t, z) \mathcal{D}_{m-1}(t) \mathcal{D}_{n-1}(z)\, dt dz +$$

$$+ O\left(\frac{\ln mn}{(m^2+n^2)^r} + \frac{1}{m^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}\right), \qquad (7)$$

где Δ_∞^{0r} — подкласс функций $f(x, y) \in \Delta'_\infty$, четных по каждой переменной, а $\mathcal{D}_j(u) = \sin \frac{2j+1}{2} u / 2 \sin \frac{u}{2}$ — ядра Дирихле.

Доказательство. Из результатов А. Н. Колмогорова [3] следует, что

$$\mathcal{T}_m(\varphi) = \frac{(-1)^{r+1}}{\pi} \frac{2}{m^{2r}} \int_0^\pi \varphi(t, 0) \mathcal{D}_{m-1}(t)\, dt + O\left(\frac{1}{m^{2r}}\right),$$

$$\mathcal{T}_n(\varphi) = \frac{(-1)^{r+1}}{\pi} \frac{2}{n^{2r}} \int_0^\pi \varphi(0, z) \mathcal{D}_{n-1}(z)\, dz + O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right).$$

Выполняя дважды по каждой переменной преобразование Абеля с величиной

$$\mathcal{D}_{m-1,n-1}^{(2r)}(t, z) = (-1)^r \sum_{k=m}^\infty \sum_{l=n}^\infty \frac{\cos kt \cos lz}{(k^2+l^2)^r},$$

имеем

$$\mathcal{D}_{m-1,n-1}^{(2r)}(t, z) = \mathcal{D}_{m-1}(t) \mathcal{D}_{n-1}(z)/(m^2+n^2)^r + \mathcal{R}_{m,n}(t, z),$$

где

$$\mathcal{R}_{m,n}(t, z) = \mathcal{D}_{n-1}(t) \left(\Delta_k^1 \frac{1}{(m^2+n^2)^r} m\mathcal{F}_{m-1}(t) - \sum_{k=m}^\infty \Delta_{kk}^2 \frac{1}{(k^2+n^2)^r} (k+1) \times\right.$$

$$\left.\times \mathcal{F}_k(t)\right) - \mathcal{F}_{n-1}(z)\, n \sum_{k=m}^\infty \Delta_{kkl}^3 \frac{1}{(k^2+n^2)^r} (k+1) \mathcal{F}_k(t) + \mathcal{D}_{m-1}(t) \times$$

$$\times \left(\Delta_l^1 \frac{1}{(m^2+n^2)^r} n\mathcal{F}_{n-1}(z) - \sum_{l=n}^\infty \Delta_{ll}^2 \frac{1}{(m^2+l^2)^r} (l+1) \mathcal{F}_l(z)\right) -$$

$$- m\mathcal{F}_{m-1}(t) \sum_{l=n}^\infty \Delta_{llk}^3 \frac{1}{(m^2+l^2)^r} (l+1) \mathcal{F}_l(z) - mn\mathcal{F}_{m-1}(t) \mathcal{F}_{n-1}(z) \Delta_{kl}^2 \times$$

$$\times \frac{1}{(m^2+n^2)^r} + \sum_{k=m}^\infty \sum_{l=n}^\infty \Delta_{kkll}^4 \frac{1}{(k^2+l^2)^r} (k+1)(l+1) \mathcal{F}_k(t) \mathcal{F}_l(z),$$

$$\mathcal{F}_n(\xi)=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}\xi}{2(n+1)\sin^2\frac{\xi}{2}}$$ — ядро Фейера порядка n,

$$\Delta_k^1\frac{1}{(m^2+n^2)^r}=\frac{1}{(m^2+n^2)^r}-\frac{1}{((m+1)^2+n^2)^r},$$

$$\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+n^2)^r}=\Delta_k^1\frac{1}{(k^2+n^2)^r}-\Delta_k^1\frac{1}{((k+1)^2+n^2)^r},$$

$$\Delta_{kkl}^3\frac{1}{(k^2+n^2)^r}=\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+n^2)^r}-\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+(n+1)^2)^r},$$

$$\Delta_{kkll}^4\frac{1}{(k^2+l^2)^r}=\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+l^2)^r}-2\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+(l+1)^2)^r}+$$

$$+\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+(l+2)^2)^r}.$$

Поскольку

$$\left|\Delta_k^1\frac{1}{(m^2+n^2)^r}\right|\leqslant\frac{cm}{(m^2+n^2)^{r+1}},\quad\left|\Delta_{kk}^2\frac{1}{(k^2+n^2)^r}\right|\leqslant\frac{c}{(k^2+n^2)^{r+1}},$$

$$\left|\Delta_{kkl}^3\frac{1}{(k^2+n^2)^r}\right|\leqslant\frac{cn}{(k^2+n^2)^{r+2}},\quad\left|\Delta_{kkll}^4\frac{1}{(k^2+l^2)^r}\right|\leqslant\frac{c}{(k^2+l^2)^{r+2}},$$

и, как известно,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|\mathcal{D}_k(u)|\,du=\frac{4}{\pi^2}\ln k+O(1),\tag{8}$$

то

$$\frac{4}{\pi^2}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\mathcal{R}_{m,n}(t,z)\,dtdz\right|\leqslant c\,\frac{\ln mn}{(m^2+n^2)^r}.$$

Здесь и везде в дальнейшем через c обозначены абсолютные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах.

Пусть $Q_{\frac{\pi}{j}}=\left\{(x,y):|x|\leqslant\frac{\pi}{j},\ |y|\leqslant\frac{\pi}{j}\right\}$, $P=Q_\pi-Q_{\frac{\pi}{2}}$.

Лемма 3. *Для любых m и n имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{m,n}(\Delta_\infty^r)=\frac{1}{\pi^2}\iint_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dtdz-\frac{2\varepsilon_1}{\pi^2}\iint_P|\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dtdz,\tag{9}$$

где $0\leqslant\varepsilon_1\leqslant1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathcal{E}_{m,n}(\Delta_\infty^r)=\sup_{f\in\Delta_\infty^r}|f(0,0)-S_{m,n}(f;0,0)|\leqslant\frac{1}{\pi^2}\iint_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dtdz.\tag{10}$$

Пусть далее $D=Q_{\frac{\pi}{2}}\cup G$, где $G=\{(t,z):\pi/2\leqslant|t|,\ |z|\leqslant\pi\}$.

Положим теперь

$$\varphi^*(t,z)=\operatorname{sign}\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z),\ (t,z)\in D,\ -\varphi^*(t,z)=\varphi^*(t+\pi,z).$$

Ясно, что $\iint_{Q_\pi}\varphi^*(t,z)\,dtdz=0$. Поэтому для функции $f^*\in\Delta_\infty^r$ и такой, что

$\Delta^r f^* = \varphi^*$, имеем

$$\mathcal{E}_{m,n}(\Delta_\infty^r) \geqslant \frac{1}{\pi^2}\iint_D |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz - \frac{1}{\pi^2}\iint_{Q_\pi\setminus D} |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\iint_{Q_\pi} |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz - \frac{2}{\pi^2}\iint_{Q_\pi\setminus D} |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi^2}\iint_{Q_\pi} |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz - \frac{2}{\pi^2}\iint_P |\Psi_{m,n}^{(r)}(t,z)|\,dt\,dz. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует соотношение (9).

Доказательство теоремы. Пусть сначала $p=\infty$. Оценка сверху для величины $\mathcal{E}_{m,n}(\Delta_\infty^r)$ следует из равенств (7) и (8).

Обозначим через $\varphi^0(x, y)$ 2π-периодическую, четную по обеим переменным функцию, которая в $K_1 = \{(x,y): 0 \leqslant x, y \leqslant \pi\}$ определяется так:

$$\varphi^0(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sign} \mathcal{D}_{m-1}(x)\,\mathcal{D}_{n-1}(y), & \text{если } \pi/(2m-1) \leqslant x \leqslant \pi,\\ & \quad\ \pi/(2n-1) \leqslant y \leqslant \pi,\\ \operatorname{sign} \mathcal{D}_{m-1}(x), & \text{если } \pi/(2m-1) \leqslant x \leqslant \pi,\\ & \quad\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/(2n-1),\\ \operatorname{sign} \mathcal{D}_{n-1}(y), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi/(2m-1),\\ & \quad\ \pi/(2n-1) \leqslant y \leqslant \pi,\\ 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi/(2m-1),\\ & \quad\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/(2n-1). \end{cases}$$

Пусть $f^0(x, y)$ такова, что $\Delta^r f^0(x,y) = \varphi^0(x,y)$, тогда согласно лемме 2

$$|f^0(0,0) - S_{m,n}(f^0;0,0)| = \frac{2}{\pi}\frac{1}{m^{2r}}\int_0^\pi \varphi^0(t,0)\,\mathcal{D}_{m-1}(t)\,dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^{2r}}\int_0^\pi \varphi^0(0,z)\,\mathcal{D}_{n-1}(z)\,dz + \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(m^2+n^2)^r}\times$$

$$\times \iint_{Q_\pi} \varphi^0(t,z)\,\mathcal{D}_{m-1}(t)\,\mathcal{D}_{n-1}(z)\,dt\,dz + O\left(\frac{\ln nm}{(m^2+n^2)^r} + \frac{1}{m^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(m^2+n^2)^r}\int_{\pi/(2m-1)}^\pi \int_{\pi/(2n-1)}^\pi |\mathcal{D}_{m-1}(t)|\,|\mathcal{D}_{n-1}(z)|\,dt\,dz +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{1}{m^{2r}}\int_{\pi/(2m-1)}^\pi |\mathcal{D}_{m-1}(t)|\,dt + \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^{2r}}\int_{\pi/(2n-1)}^\pi |\mathcal{D}_{n-1}(z)|\,dz +$$

$$+ O\left(\frac{\ln mn}{(m^2+n^2)^r} + \frac{1}{m^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}\right).$$

Учитывая соотношение (8), для функции $f^0(x,y) \in \Delta_\infty^r$ имеем равенство

$$|f(0,0) - S_{m,n}(f;0,0)| = \frac{16}{\pi^4}\frac{\ln m \ln n}{(m^2+n^2)^r} + \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln m}{m^{2r}} +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^{2r}} + O\left(\frac{\ln mn}{(m^2+n^2)^r} + \frac{1}{m^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}\right).$$

Этим теорема в случае $p=\infty$ доказана.

Пусть теперь $p=1$. С помощью обобщенного неравенства Минковского [4] находим

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_1^r)=\sup_{f\in\Delta_1^r}\iint\limits_{Q_\pi}\left|\iint\limits_{Q_\pi}\varphi(x,y)\,\Psi_{m,n}^{(r)}(x-t,\ y-z)\,dxdy\right|dtdz\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy. \qquad (12)$$

Из соотношения, доказанного в [2] (см. с. 151, формула (3.4)), следует, что

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_1^r)\geqslant\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)-\Psi_{m,n}^{(r)}(x+\pi,\ y+\pi)|\,dxdy.$$

Далее, после тождественных преобразований имеем

$$\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)-\Psi_{m,n}^{(r)}(x+\pi,\ y+\pi)|\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{Q_{\pi/2}}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)-\Psi_{m,n}^{(r)}(x+\pi,\ y+\pi)|\,dxdy+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_{\pi/2}}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,\ y+\pi)-\Psi_{m,n}^{(r)}(x+\pi,\ y)|\,dxdy\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_{\pi/2}}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_{\pi/2}}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x+\pi,\ y+\pi)|\,dxdy+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\pi/2}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,\ y+\pi)|\,dxdy-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_{\pi/2}}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x+\pi,\ y)|\,dxdy\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy-\frac{2}{\pi^2}\iint\limits_{P}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy. \qquad (13)$$

На основании (12) и (13) можно утверждать, что

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_1^r)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_\pi}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy-\frac{2}{\pi^2}\varepsilon_2\iint\limits_{P}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy, \qquad (14)$$

где $0\leqslant\varepsilon_2\leqslant 1$.

Теперь из леммы 3 и равенства (14) вытекает справедливость соотношения

$$\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_1^r)=\mathscr{E}_{m,n}(\Delta_\infty^r)-\frac{2}{\pi^2}\varepsilon\iint\limits_{P}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy,$$

где $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$.

Поскольку

$$\frac{2}{\pi^2}\iint\limits_{P}|\Psi_{m,n}^{(r)}(x,y)|\,dxdy=O\left(\frac{\ln mn}{(m^2+n^2)^r}+\frac{1}{m^{2r}}+\frac{1}{n^{2r}}\right),$$

то доказательство теоремы завершено и в случае $p=1$.

В заключение отметим, что в случае функций одной переменной равенство, аналогичное (2), при $p = \infty$ было получено А. Н. Колмогоровым [3], а при $p = 1$ — С. М. Никольским [5].

1. *Степанец А. И.* Исследования по экстремальным задачам теории суммирования рядов Фурье: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1974.—39 с.
2. *Бугров Я. С.* Приближение тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых полигармоническим оператором.— Успехи мат. наук, 1958, **15**, № 2, с. 149—156.
3. *Kolmogoroff A.* Zur Grassenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Funktionen.— Ann. Math., 1935, **36**, № 2, S. 251—526.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М. : Наука, 1975.—480 с.
5. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Математика, 1946, **10**, № 3, с. 207—256.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
25.02. 1981 г.