УДК 513.83

Р. С. Линичук

О свойствах некоторых гиперпространств типа бесконечномерности

Различные виды непрерывностей многозначных отображений топологических пространств вполне описываются пространствами непустых подмножеств (гиперпространствами) топологических пространств. В частности, полунепрерывность сверху многозначных отображений описывается пространством подмножеств $\varkappa X$ [1]. Исследуем определенные свойства типа бесконечномерности пространства $\varkappa X$.

Пусть X — топологическое пространство, $P(X)$ — семейство всех его непустых подмножеств. Пару $(P(X), \xi)$, где ξ — некоторая топология на $P(X)$, назовем ξ-гиперпространством пространства X и обозначим ξX. К числу наиболее важных гиперпространств относятся пространства $\varkappa X$ и λX, где $\varkappa$ (λ) — полунепрерывная сверху (снизу) топология на множестве $P(X)$. Если $U \subset X$, то полагаем

$$\Delta_1(U) = \{(B) \in \mathbf{P}(X) \mid B \subset U\}, \ \Delta_2(U) = \{(B) \in \mathbf{P}(X) \mid B \cap U \neq \varnothing\}.$$

Скобки в записи (B) подчеркивают, что подмножество B в данном случае выступает в качестве точки множества $P(X)$. Всевозможные подсемейства вида $\Delta_1(U)$ $\Delta_2(U)$ формируют базис топологии $\varkappa$ (предбазис топологии λ) на множестве $P(X)$, когда U пробегает всевозможные открытые в X множества [1].

Определение 1. *Покрытие $\omega = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства X называется неприводимым, если система, полученная из ω путем отбрасывания любого ее элемента, не является покрытием пространства X* [2].

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Покрытие $\omega = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ топологического пространства X является неприводимым тогда и только тогда, когда существует такой набор $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ точек пространства X, что $\forall \alpha \in A$ $(x_\alpha \in F_\alpha)$ и, кроме того, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \forall$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow x_{\alpha_1} \notin F\alpha_2)$.*

Определение 2. *Топологическое пространство X называется F-неприводимым, если для любого $n \in \mathbf{N}$ существует неприводимое замкнутое покрытие этого пространства из n элементов. Пространства, не являющиеся F-неприводимыми, будем называть F-приводимыми.*

Определение 3. *Топологическое пространство X назовем F-бесконечномерным, если для любого $n \in \mathbf{N}$ существует конечное замкнутое покрытие этого пространства такое, что кратность любого вписанного в него замкнутого покрытия больше $n + 1$.*

Если в последнем определении фразу «конечное замкнутое покрытие» заменить на «конечное открытое покрытие», то условие F-бесконечномерности пространства X превратится в условие $\dim X = \infty$ [3, с. 166].

Из определения 1 и предложения 1 легко следует такое предложение.

Предложение 2. *Пусть $\omega = \{F_1, \ldots, F_n\}$ — произвольное неприводимое покрытие топологического пространства X. Тогда любое вписанное в него покрытие состоит не менее, чем из n элементов.*

Предложение 3. *Если пространство X является F-неприводимым, пространство $\varkappa X$ — F-бесконечномерно.*

Доказательство. Пусть $n \in \mathbf{N}$ произвольное натуральное число. По условию существует замкнутое покрытие $\omega = \{F_1, \ldots, F_{n+2}\}$ пространства X из $n + 2$ элементов. В силу предложения 1 существует $\{x_1, \ldots, x_{n+2}\}$ — такой набор точек пространства X, что $x_i \in F_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, n + 2\}$ и $x_i \notin F_j$, как только $i \neq j$. Заметим, что система $\hat{\omega} = \{\Delta_2(F_1), \ldots, \Delta_2(F_{n+2})\}$ является неприводимым замкнутым покрытием пространства $\varkappa X$. Действительно, набор $\{(x_1), \ldots, (x_{n+2})\}$ точек пространства $\varkappa X$ таков, что $(x_i) \in \Delta_2(F_i)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n + 2\}$ и $(x_i) \notin \Delta_2(F_j)$ при $i \neq j$. Поэтому согласно предложению 1 $\hat{\omega}$ — неприводимо (тот факт, что $\hat{\omega}$

есть покрытие пространства $\varkappa X$, сразу же вытекает из того, что ω — покрытие пространства X, а также из определения множеств $\Delta_2(F_i)$). Кроме того, каждое из множеств $\Delta_2(F_1), \ldots, \Delta_2(F_{n+2})$ замкнуто в пространстве $\varkappa X$ ввиду того, что $\Delta_2(F_i) = \varkappa X \setminus \Delta_1 \; (X \setminus F_i)$ и множество $\Delta_1 \; (X \setminus F_i)$ открыто в $\varkappa X$, $i = 1, \ldots, n+2$. Легко видеть, что «главная» точка (X) пространства $\varkappa X$, порожденная всем X, принадлежит замыканию любой точки пространства $\varkappa X$, а значит, и любому замкнутому подмножеству пространства $\varkappa X$, поэтому кратность любого замкнутого покрытия пространства $\varkappa X$ равна числу его элементов. Любое вписанное в $\hat{\omega}$ замкнутое покрытие пространства $\varkappa X$ ввиду неприводимости покрытия $\hat{\omega}$ и в силу предложения 2 состоит не менее, чем из $n+2$ элементов и, стало быть, его кратность больше $n+1$. Таким образом, для любого натурального числа n мы нашли такое конечное замкнутое покрытие пространства $\varkappa X$, что кратность любого вписанного в него замкнутого покрытия больше $n+1$. Предложение доказано.

Возникает такой вопрос: насколько широк класс F-неприводимых пространств?

Предложение 4. *Топологическое пространство X является F-неприводимым тогда и только тогда, когда для любого натурального числа n существует дизъюнктная система открытых в X подмножеств, состоящая из n элементов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X является F-неприводимым, $n \in \mathbf{N}$ — произвольное натуральное число и $\omega = \{F_1, \ldots, F_n\}$ — неприводимое замкнутое покрытие пространства X из n элементов. Для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ полагаем $U_i = X \setminus \bigcup_{j \neq i} F_j$. Ясно, что $U_i \neq \varnothing$. Очевидно также, что система открытых в X множеств $\{U_1, \ldots, U_n\}$ дизъюнктна.

Достаточность. Если $n \in \mathbf{N}$—произвольное и $\{U_1, \ldots, U_n\}$—дизъюнктная система открытых в пространстве X множеств, состоящая из n элементов, то, как легко видеть, система $\{F_1, \ldots, F_n\}$, где $F_i = X \setminus \bigcup_{i \neq j} U_j$, $i = 1, \ldots, n$, является замкнутым неприводимым покрытием пространства X из n элементов. Предложение доказано.

Примерами F-неприводимых пространств могут служить все пространства R^n, $n \in \mathbf{N}$, гильбертово пространство R^∞, любое пространство, содержащее бесконечное подмножество из изолированных точек и вообще любое топологическое пространство X, число клеточности c X которого бесконечно. Из примеров F-приводимых пространств отметим прежде всего все конечные пространства. Примером бесконечного F-приводимого пространства может служить элементарное T_1-пространство E^τ бесконечной мощности τ [4]. В силу предложения 4, а также предложения 1 из [2] F-приводимыми являются также все пространства класса $\{\lambda X \mid X$ — бесконечное пространство$\}$ и, в частности, все пространства λX, где X— F-неприводимое пространство. Учитывая этот факт, а также теорему о том, что пространства λX и λY омеоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y гомеоморфны [5], заключаем, что F-приводимых пространств «не меньше» F-неприводимых.

1. *Линичук Р. С.* Многозначные отображения и непрерывность разбиений топологических пространств.— В кн.: Десятая математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 308—329.
2. *Линичук Р. С.* О размерности гиперпространств.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 3, с. 378—381.
3. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности.— М.: Наука, 1973.—575 с.
4. *Линичук Р. С.*, О диадических подпространствах некоторых гиперпространств.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 2, с. 232—234.
5. *Линичук Р. С.* Многозначные отображения и пространства подмножеств: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1975.—16 с.

Ворошиловградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
14.05. 1981 г.