УДК 519.41/47

В. С. Марач

О некоторых группах, определяемых свойствами циклических подгрупп

В работе [1] установлено строение групп, произвольная подгруппа которых имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе. В нашей статье изучаются произвольные группы, у которых каждая циклическая подгруппа имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе, и непериодические группы, у которых этому условию удовлетворяет каждая бесконечная циклическая подгруппа. Рассмотрим и непериодические группы, каждая бесконечная циклическая подгруппа которых содержит инвариантную в группе нетривиальную подгруппу конечного индекса.

Лемма 1. *Пусть в группе G конечно-порожденная подгруппа H имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе N группы G. Тогда подгруппа H содержит инвариантную в G подгруппу конечного индекса.*

Доказательство. Пусть H — конечно-порожденная подгруппа группы G и N — такая инвариантная подгруппа, что $[N : H] < \infty$. Пользуясь известной теоремой о конечности числа подгрупп данного конечного индекса в конечно-порожденной группе, легко убедиться, что пересечение всех бесконечных подгрупп из N, имеющих в N один и тот же конечный индекс, равный $[N : H]$, будет бесконечной подгруппой, имеющей в H конечный индекс. Эта подгруппа будет характеристической в N и потому инвариантной в G. Лемма доказана.

Теорема 1. *В группе G каждая циклическая подгруппа тогда и только тогда имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе, когда группа G является FC-группой.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа G обладает свойством, указанным в теореме, и пусть $\langle g\rangle$ — произвольная циклическая подгруппа группы G. Тогда в G найдется такая инвариантная подгруппа N_1, что $\langle g\rangle \leqslant N_1$ и $[N_1 : \langle g\rangle] < \infty$. Если элемент g имеет конечный порядок, то отсюда непосредственно следует, что он имеет конечное число сопряженных в G. Предположим, что элемент g имеет бесконечный порядок. В силу леммы 1 циклическая подгруппа $\langle g\rangle$ содержит инвариантную в G подгруппу N_2 конечного индекса. В фактор-группе G/N_2 конечная циклическая подгруппа $\langle gN_2\rangle$ имеет конечное число сопряженных. Но тогда бесконечная циклическая подгруппа $\langle g\rangle$ имеет конечное число сопряженных в группе G. Так как в бесконечной циклической группе в качестве порождающего элемента могут быть выбраны только два различных элемента этой группы, то элемент g имеет конечное число сопряженных в G. Ввиду произвольности выбора элемента g отсюда следует, что G является FC-группой.

Достаточность. Пусть G—FC-группа и $\langle g\rangle$ — произвольная ее циклическая подгруппа. Если подгруппа $\langle g\rangle$ конечная, то, очевидно, она содержится в некоторой конечной инвариантной подгруппе N группы G. Предположим, что $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа. Тогда для некоторого натурального числа n элемент g^n содержится в центре группы G (см. [2], следствие 3.10). Очевидно, подгруппа $N_2 = \langle g^n\rangle$ инвариантна в G. Фактор-группа G/N_2 снова является FC-группой, поэтому ее конечная подгруппа $\langle gN_2\rangle$ содержится в некоторой конечной инвариантной подгруппе N_1/N_2. Очевидно, $[N_1 : \langle g\rangle] < \infty$. Теорема доказана.

Пусть N_1, N_2 — такие инвариантные подгруппы группы G, что $[N_1 : N_2] < \infty$. Множество всех подгрупп H группы G таких, что $N_1 \geqslant H \geqslant N_2$, назовем конечным инвариантным скачком группы G. Ввиду леммы 1 из теоремы 1 непосредственно получается такое следствие.

Следствие 1. *В группе G каждая циклическая подгруппа тогда и только тогда содержится в некотором конечном инвариантном скачке, когда группа G является FC-группой.*

Теорема 2. *В непериодической группе G произвольная бесконечная циклическая подгруппа тогда и только тогда имеет конечный индекс в неко-*

торой инвариантной подгруппе, когда группа G либо является FC-группой, либо содержит подгруппу H индекса 2, являющуюся FC-группой и содержащую все элементы бесконечного порядка из G.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — непериодическая группа, обладающая свойством, указанным в теореме, и $\langle g\rangle$ — произвольная ее бесконечная циклическая подгруппа. Тогда в группе G найдется такая инвариантная подгруппа N_1, что $\langle g\rangle \leqslant N_1$ и $|N_1:\langle g\rangle| < \infty$. Ввиду леммы 1 для некоторого натурального числа n циклическая подгруппа $\langle g_0\rangle$, где $g_0 = g^n$, инвариантна в G. Пусть $H = C_G(g_0)$. Так как $\langle g_0\rangle$ — бесконечная инвариантная циклическая подгруппа, то $|G:H| \leqslant 2$. Обозначим через H_0 максимальную подгруппу без кручения из центра H, содержащую элемент g_0 (ввиду леммы Цорна такая подгруппа существует). Предположим, что в H найдется такой элемент h бесконечного порядка, что $\langle h\rangle \cap H_0 = \langle 1\rangle$. Ввиду леммы 1 и условия теоремы для некоторого натурального числа m подгруппа $\langle h_1\rangle$, где $h_1 = h^m$, инвариантна в G. Так как $\langle h_1\rangle$ — инвариантная бесконечная циклическая подгруппа, то $g^{-1}h_1g = h_1^{\pm 1}$ для произвольного $g \in G$. Предположим, что для некоторого элемента $h_2 \in H$ $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$. Очевидно, $\langle h_1g_0\rangle$ — бесконечная циклическая подгруппа, поэтому ввиду леммы 1 и условия теоремы для некоторого натурального числа l $\langle (h_1g_0)^l\rangle \triangle G$. Мы имеем $h_2^{-1}(h_1g_0)^l h_2 = (h_1g_0)^{\pm l}$. С другой стороны, $h_2^{-1}(h_1g_0)^l h_2 = h_2^{-1}(h_1^lg_0^l)h_2 = h_2^{-1}h_1^lh_2\cdot h_2^{-1}g_0^lh_2 = h_1^{-l}g_0^l$. Следовательно, $(h_1g_0)^{\pm l} = h_1^{-l}g_0^l$. Так как h_1, g_0 — перестановочные элементы бесконечного порядка, то последнее соотношение приводит к противоречию. Поэтому $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1$ для всех элементов $h_2 \in H$, т. е. элемент h_1 содержится в центре подгруппы H. Очевидно, подгруппа $\langle h_1\rangle \times H_0$ не имеет кручения и содержится в центре подгруппы H. Но это противоречит максимальности подгруппы H_0. Следовательно, для произвольного элемента бесконечного порядка $h \in H$ $\langle h\rangle \cap H_0 \neq \langle 1\rangle$, т. е. фактор-группа H/H_0 периодическая. Пусть $\langle hH_0\rangle$ — произвольная циклическая подгруппа фактор-группы H/H_0. Если порядок элемента h бесконечен, то ввиду условия теоремы бесконечная циклическая подгруппа $\langle h\rangle$ имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе группы G. Если же порядок элемента h конечен, то циклическая подгруппа $\langle hg_0\rangle$ является бесконечной и, как и в предыдущем случае, имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе группы G. В обоих случаях циклическая подгруппа $\langle hH_0\rangle$ имеет конечный индекс в некоторой инвариантной подгруппе фактор-группы H/H_0. Ввиду периодичности фактор-группы H/H_0 и теоремы 1 отсюда следует, что фактор-группа H/H_0 локально-нормальна. Но тогда подгруппа H является FC-группой (см. [2], теорема 3.13). Если $G = H$, то доказательство необходимости завершено. Поэтому предположим, что $|G:H| = 2$, $G = \langle g_1, H\rangle$, и пусть для некоторого $h \in H$ элемент g_1h имеет бесконечный порядок. Очевидно, для некоторого натурального числа k элемент $g_2 = (g_1h)^k$ содержится в подгруппе H_0, поэтому он перестановочен с произвольным элементом из H. Так как элемент g_2 перестановочен также с элементом g_1h, то он содержится в центре группы G. По уже доказанному выше группа G в этом случае является FC-группой. Следовательно, если G не является FC-группой, то в подгруппе H содержатся все элементы бесконечного порядка из G.

Достаточность. Если группа G является FC-группой, то доказательство завершается применением теоремы 1. Поэтому будем предполагать, что непериодическая группа G содержит подгруппу индекса 2, являющуюся FC-группой и содержащую все элементы бесконечного порядка из G. Пусть $G = \langle g, H\rangle$. Обозначим через Z центр подгруппы H. Очевидно, $Z \lhd G$. Пусть $\langle h\rangle$ — произвольная бесконечная циклическая подгруппа группы G. По предположению $h \in H$. Для некоторого натурального числа k элемент $z_1 = h^k$ содержится в Z. Пусть $g^{-1}z_1g = z_2$, где $z_2 \in Z$. По предположению элементы g и gz_1 имеют конечные порядки, поэтому для $n = |g| \times \times |gz_1|$

$$1 = (gz_1)^{2n} = (gz_1\cdot gz_1)^n = (g^2z_2z_1)^n = g^{2n}z_2^nz_1^n = z_2^nz_1^n.$$

Отсюда следует, что $z_2^n = z_1^{-n}$, и потому для элемента $z_0 = h^{nk} g^{-1} z_0 g = z_0^{-1}$. Это значит, что бесконечная циклическая подгруппа $N_2 = \langle z_0 \rangle$ инвариантна в G. Фактор-группа H/N_2 снова является FC-группой, поэтому централизатор элемента hN_2 имеет в ней конечный индекс. Но тогда централизатор элемента hN_2 имеет конечный индекс и в фактор-группе G/N_2, т. е. элемент конечного порядка hN_2 имеет конечное число сопряженных в G/N_2. По лемме Дицмана (см., напр. [3, с. 388]) элемент hN_2 содержится в некоторой конечной инвариантной подгруппе N_1/N_2 фактор-группы G/N_2. Следовательно, бесконечная циклическая подгруппа $\langle h \rangle$ имеет конечный индекс в инвариантной подгруппе N_1 группы G. Теорема доказана.

Ввиду леммы 1 из теоремы 2 непосредственно получается следствие.

Следствие 2. *В непериодической группе G произвольная бесконечная циклическая подгруппа тогда и только тогда содержится в некотором конечном инвариантном скачке, когда группа G либо является FC-группой, либо содержит подгруппу H индекса 2, являющуюся FC-группой и содержащую все элементы бесконечного порядка из G.*

Теорема 3. *В непериодической группе G произвольная бесконечная циклическая подгруппа тогда и только тогда содержит инвариантную в G нетривиальную подгруппу, когда группа G есть такое расширение свободной абелевой группы A с помощью периодической группы, что произвольный внутренний автоморфизм группы G либо действует на A тождественно, либо переводит все элементы из A в им обратные.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть G — непериодическая группа, обладающая свойством, указанным в теореме, и $\langle g \rangle$ — произвольная бесконечная циклическая подгруппа из G. Тогда для некоторого натурального числа n $\langle g^n \rangle \lhd G$. Обозначим через A максимальную подгруппу из G, разлагающуюся в прямое произведение инвариантных в G бесконечных циклических подгрупп: $A = \prod_{i \in I} \langle a_i \rangle$, где $\langle a_i \rangle \lhd G$ для всех $i \in I$ (ввиду леммы Цорна такая подгруппа существует). Покажем, что фактор-группа G/A периодическая. Пусть в G найдется такой элемент h бесконечного порядка, что $\langle h \rangle \cap A = \langle 1 \rangle$. Ввиду условия теоремы для некоторого натурального числа k $\langle h^k \rangle \lhd G$, и поэтому подгруппа $\langle h^k \rangle \times A$ разлагается в прямое произведение инвариантных в G бесконечных циклических подгрупп. Но это противоречит предположению о максимальности подгруппы A. Следовательно, фактор-группа G/A периодическая.

Предположим теперь, что для некоторого внутреннего автоморфизма φ группы G найдутся такие $i, j \in I$, что $a_i^\varphi = a_i$, $a_j^\varphi = a_j^{-1}$ ($a_i^\varphi = a_i^{\pm 1}$ для произвольного $i \in I$, так как $\langle a_i \rangle$ — инвариантная бесконечная циклическая подгруппа группы G). Подгруппа $\langle a_i a_j \rangle$ является бесконечной циклической подгруппой, поэтому для некоторого натурального числа m $\langle (a_i a_j)^m \rangle \lhd G$. Мы имеем $((a_i a_j)^m)^\varphi = (a_i a_j)^{\pm m}$. С другой стороны, $((a_i a_j)^m)^\varphi = (a_i^m a_j^m)^\varphi = (a_i^m)^\varphi \cdot (a_j^m)^\varphi = a_i^m a_j^{-m}$. Отсюда получаем $(a_i a_j)^{\pm m} = a_i^m a_j^{-m}$. Так как A — абелева группа без кручения, то последнее соотношение приводит к противоречию. Следовательно, произвольный внутренний автоморфизм группы G либо действует на A тождественно, либо переводит все элементы из A в им обратные. Теорема доказана.

Следствие 3. *В группе G без кручения произвольная бесконечная циклическая подгруппа тогда и только тогда содержит инвариантную в G нетривиальную подгруппу, когда фактор-группа G/Z группы G по ее центру Z периодическая.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть группа без кручения G обладает свойством, указанным в следствии. В силу теоремы 3 группа G является расширением своей свободной абелевой подгруппы A с помощью периодической группы и произвольный внутренний автоморфизм группы G либо действует на A тождественно, либо переводит все элементы из A в им обратные. Пусть φ — произвольный внутренний автоморфизм группы G. Тогда найдется такой элемент $g_0 \in G$, что $g^\varphi = g_0^{-1} g g_0$ для всех $g \in G$. Так как фактор-группа G/A периодическая, то для некоторого натурального числа n $g_0^n \in A$. Очевидно, $(g_0^n)^\varphi = g_0^n$, поэтому автоморфизм φ действует на A тождественно. Ввиду произвольности выбора внутреннего автоморфизма φ отсюда следует, что подгруппа A содержится в центре группы G. Следствие доказано.

Следствие 4. *Если в локально-разрешимой группе G без кручения произвольная бесконечная циклическая подгруппа содержит инвариантную в G нетривиальную подгруппу, то группа G абелева.*

Доказательство. Пусть G — локально-разрешимая группа без кручения, обладающая свойством, указанным в следствии. В силу следствия 3 фактор-группа G/Z группы G по ее центру Z периодическая. Кроме того, фактор-группа G/Z локально-разрешима, поэтому она также локально-конечна. Но тогда группа G абелева (см. [2], лемма 3.9).

Следствие 5. *Если в группе G с однозначным извлечением корня произвольная бесконечная цикличная подгруппа содержит инвариантную в G нетривиальную подгруппу, то группа G абелева.*

Доказательство. Пусть G — группа с однозначным извлечением корня, обладающая свойством, указанным в следствии. Очевидно, группа G не имеет кручения. В силу следствия 3 фактор-группа G/Z группы G по ее центру Z периодическая. Кроме того, фактор-группа G/Z также обладает свойством однозначности извлечения корня (см. [3, с. 412]), и потому ввиду периодичности она единичная. Следствие доказано.

Относительно следствий 3—5 заметим, что существуют также неабелевы группы без кручения с периодической фактор-группой по центру. В работе [4, с. 288] построен пример неабелевой группы без кручения, центр которой является бесконечной циклической группой, а фактор-группа по центру есть бесконечная периодическая m-порожденная группа показателей n, где $m > 1$, n — нечетное.

1. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups.— Math. Z., 1955, **63**, N 1, p. 76—96.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М.: Наука, 1980.—384 с.
3. *Курош А. Г.* Теория групп.— М.: Наука, 1967.—648 с.
4. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах.— М.: Наука, 1975.—336 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
02.04. 1981 г.