УДК 517.9

Нгуен Донг Ань, Кьеу Тхе Дык

О решении уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова для системы Ван дер Поля, подверженной периодическим и случайным воздействиям

При изучении влияния случайного воздействия на механические системы эффективным является метод уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова, особенно в сочетании его с асимптотическим методом нелинейной механики [1]. Статья посвящена решению уравнения ФПК для неавтономной системы Ван дер Поля. Так же, как и в [2], решение этого уравнения ищем в виде ряда для амплитуды. Получена система разделяющихся дифференциальных уравнений, позволяющая последовательно определить коэффициенты разложений до любого порядка. Результат содержит автономный случай [1].

1. Рассмотрим случайную систему Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\dot{x} + \varepsilon P \cos \nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

в главной резонансной области

$$\omega^2 = \nu^2 + \varepsilon\Delta, \tag{2}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум», имеющий единичную интенсивность. Подставляя (2) в (1), имеем

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon f_1(x, \dot{x}, \nu t) + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{3}$$

где

$$f_1(x, \dot{x}, \nu t) = (1 - \gamma x^2)\dot{x} - \Delta x + P\cos\nu t. \tag{4}$$

Используя замену [1]

$$x = a\cos\psi,\ \dot{x} = -a\nu\sin\psi,\ \text{где } \psi = \nu t + \theta, \tag{5}$$

при помощи формулы Ито приведем уравнение (3) к стандартному виду

$$da = \left[-\frac{\varepsilon}{\nu} f_1(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi, \nu t)\sin\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon\sigma^2}{2a\nu^2}\cos^2\psi\right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{\nu}\sin\psi d\xi(t), \tag{6}$$

$$d\theta = \left[-\frac{\varepsilon}{a\nu} f_1(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi, \nu t)\cos\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon\sigma^2}{\nu^2 d^2}\sin\psi\cos\psi\right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\nu}\cos\psi d\xi(t).$$

Уравнение, соответствующее стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$ системы (6), усредненной согласно [1], имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial a}[K_1(a, \theta)W] + \frac{\partial}{\partial\theta}[K_2(a, \theta)W] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}[K_{11}(a, \theta)W] +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[K_{22}(a, \theta)W] + \frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}[K_{1,2}(a, \theta)W], \tag{7}$$

где

$$K_1(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{-\frac{1}{\nu} f_1(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi, \nu t)\sin\psi + \frac{\sigma^2}{2a\nu^2}\cos^2\psi\right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4\nu^2 a} + \frac{a}{2} - \frac{\gamma a^3}{8} - \frac{P\sin\theta}{2\nu}, \tag{8}$$

$$K_2(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{-\frac{1}{a\nu} f_1(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi, \nu t)\cos\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma^2}{\nu^2 a^2}\sin\psi\cos\psi^2\right\} = \frac{\Delta}{2\nu} - \frac{P\cos\theta}{2a\nu},$$

$$K_{11}(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{\left(-\frac{\sigma}{\nu}\sin\psi\right)^2\right\} = \frac{\sigma^2}{2\nu^2},$$

$$K_{12}(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{\left(-\frac{\sigma}{\nu}\sin\psi\right)\left(-\frac{\sigma}{a\nu}\cos\psi\right)\right\} = 0,$$

$$K_{22}(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}}\left\{\left(-\frac{\sigma}{a\nu}\cos\psi\right)^2\right\} = \frac{\sigma^2}{2a^2\nu^2}.$$

Выполняя замену

$$W(a, \theta) = e^{\Phi(a, \theta)}, \tag{9}$$

преобразуем уравнение (7) к виду

$$\frac{\partial K_1}{\partial a}+K_1,\ \frac{\partial \Phi}{\partial a}+\frac{\partial K_2}{\partial \theta}+K_2\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}=\frac{K_{11}}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)^2+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}\right]+$$

$$+\frac{K_{22}}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right]. \tag{10}$$

С учетом (8) имеем

$$-\frac{\sigma^2}{4a^2\nu^2}+\frac{1}{2}-\frac{3\gamma a^2}{8}+\left(\frac{\sigma^2}{4a\nu^2}-\frac{P\sin\theta}{2\nu}+\frac{a}{2}-\frac{\gamma a^3}{8}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial a}+$$

$$+\frac{P\sin\theta}{2a\nu}+\left(\frac{\Delta}{2\nu}-\frac{P\cos\theta}{2a\nu}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}=\frac{\sigma^2}{4\nu^2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)^2+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2}\right]+$$

$$+\frac{\sigma^2}{4a^2\nu^2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}\right]. \tag{11}$$

Вопрос заключается в решении нелинейного уравнения с частными производными (11)

2. Заметим, что в уравнении (11) амплитуда a играет роль обобщенной циклической координаты [2] (коэффициенты уравнения — многочлены с целыми степенями амплитуды). Следовательно, согласно [2] решение уравнения (11) ищем также в виде многочлена с целыми степенями амплитуды

$$\frac{\partial \Phi(a,\theta)}{\partial a}=a^{-1}+\sum_{i=1}^{\infty} i\mu_i(\theta)\,a^{i-1}, \tag{12}$$

или

$$\Phi(a,\theta)=\ln a+\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(\theta)\,a^i, \tag{13}$$

где $\mu_i(\theta)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие от θ. Подставляя (13) в (11) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях a, находим

$$\mu_0''+\mu_0'^2=0,\ \mu_1''+2\mu_0'\mu_1'+\mu_1=-\frac{2\nu P}{\sigma^2}\cos\theta\cdot\mu_0',\ \mu_2''+2\mu_0'\mu_2+4\mu_2=$$

$$=\frac{4\nu^2}{\sigma^2}-(\mu_1^2+\mu_1'^2)+\frac{2\nu\Delta\mu_0'}{\sigma^2}-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(\mu_1\sin\theta+\mu_1'\cos\theta),\ \mu_3''+2\mu_0'\mu_3'+9\mu_3=$$

$$=-2(2\mu_1\mu_2+\mu_1'\mu_2')-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(2\mu_2\sin\theta+\mu_2'\cos\theta)+\frac{2\nu^2}{\sigma^2}\left(\mu_1+\frac{\Delta\mu_1'}{\nu}\right),$$

$$\mu_4''+2\mu_0'\mu_4'+16\mu_4=-4(\mu_2^2+\mu_2'^2)-2(3\mu_1\mu_3+\mu_1'\mu_3')-$$

$$-\frac{2\nu^2\sigma}{\sigma^2}-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(3\mu_3\sin\theta+\mu_3'\cos\theta)+\left(\mu_2+\frac{\Delta\mu_2'}{2\nu}\right)\frac{4\nu^2}{\sigma^2}, \tag{14}$$

$$\mu_{n+2}''+2\mu_0'\mu_{n+2}'+(n+2)^2\mu_{n+2}=-\sum_{i=1}^{n+1}[i(n+2-i)\mu_i\mu_{n+2-i}+$$

$$+\mu_i'\mu_{n+2-i}']+\frac{2\nu^2}{\sigma^2}\left[n\mu_n'+\frac{\Delta}{\nu}\mu_n'\right]-\frac{\nu^2\gamma}{2\sigma^2}\mu_{n-2}(n-2)-$$

$$-\frac{2\nu P}{\sigma^2}[(n+1)\mu_{n+1}\sin\theta+\mu_{n+1}'\cos\theta],\ \text{где}\ n\geqslant 3.$$

Таким образом, мы получили систему дифференциальных уравнений для коэффициентов $\mu_i(\theta)$. Она разделяется относительно неизвестных $\mu_1(\theta)$

и позволяет последовательно определить $\mu_0, \mu_1, \mu_n, \ldots$.

$$\mu_0=\ln C=\text{const},\ C>0,\ \mu_1''+\mu_1=0,\ \mu_2''+4\mu_2=\frac{4\nu^2}{\sigma^2}-(\mu_1^2+\mu_1'^2)-$$

$$-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(\mu_1\sin\theta+\mu_1'\cos\theta),\ \mu_3''+9\mu_3=-2(2\mu_1\mu_2+\mu_1'\mu_2')-$$

$$-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(2\mu_2\sin\theta+\mu_2'\cos\theta)+\frac{2\nu^2}{\sigma^2}\left(\mu_1+\frac{\Delta\mu_1'}{\nu}\right),\ \mu_4''+16\mu_4=-(4\mu_2^2+\mu_2'^2)-$$

$$-2(3\mu_1\mu_3+\mu_1'\mu_3')-\frac{2\nu^2\gamma}{\sigma^2}-\frac{2\nu P}{\sigma^2}(3\mu_3\sin\theta+\mu_3'\cos\theta)+\frac{4\nu^2}{\sigma^2}\mu_2, \tag{15}$$

$$\mu_{n+2}''+(n+2)^2\mu_{n+2}=-\sum_{i=1}^{n+1}[i(n+2-i)\mu_i\mu_{n+2-i}+\mu_i'\mu_{n+2-i}']+$$

$$+\frac{2n\nu^2}{\sigma^2}\mu_n-\frac{(n-2)\nu^2\gamma}{2\sigma^2}\mu_{n-2}-\frac{2\nu P}{\sigma^2}[(n+1)\mu_{n+1}\sin\theta+\mu_{n+1}'\cos\theta],\ n\geqslant 3.$$

Среди решений этой системы нас будут интересовать периодические решения. При наступлении точного резонанса ($\Delta=0$) методом математической индукции легко доказать, что система (15) допускает частное периодическое решение

$$\mu_0=\ln C,\ \mu_1=-\frac{2\nu P}{\sigma^2}\sin\theta,\ \mu_2=\frac{\nu^2}{\sigma^2},\ \mu_3=0,\ \mu_4=-\frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2},$$
$$\mu_n=0,\ n\geqslant 5. \tag{16}$$

Подставляя (16) в (13), получаем точное решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова для неавтономной системы Ван дер Поля

$$\Phi(a,\theta)=\ln a+\ln C-\frac{2\nu Pa}{\sigma^2}\sin\theta+\frac{\nu^2}{\sigma^2}a^2-\frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4. \tag{17}$$

С учетом (9) функция плотности вероятностей в данном случае имеет вид

$$W(a,\theta)=Ca\exp\left\{-\frac{2\nu Pa}{\sigma^2}\sin\theta+\frac{\nu^2a^2}{\sigma^2}-\frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4\right\}. \tag{18}$$

Для автономной системы Ван дер Поля ($P=0$) решение (18) совпадает с решением

$$W(a,\theta)=Ca\exp\left\{\frac{\nu^2}{\sigma^2}a^2-\frac{\gamma\nu^2}{8\sigma^2}a^4\right\}, \tag{19}$$

полученным в [1] методом разделения переменных.

Функция плотности вероятностей (18) будет достигать экстремума в точках $(a_0\theta_0)$, где

$$\partial W/\partial a=0,\ \partial W/\partial\theta=0.$$

Отсюда получаем уравнения, приближенно определяющие средние значения амплитуды и фазы

$$\frac{\sigma^2}{a_0}+2\nu^2a_0-\frac{\gamma\nu^2}{2}a_0^3-2\nu P\sin\theta_0=0,\ -2\nu Pa_0\cos\theta_0=0. \tag{20}$$

В случае отсутствия случайного воздействия ($\sigma=0$) уравнения (20) будут совпадать с таковыми, полученными в [3] для детерминированного случая.

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 102—145.
2. *Нгуен Донг Ань.* К вопросу исследования уравнений ФПК методом разложения в ряд Маклорена по циклической координате.— Механика, Ханой, 1979, № 1/2. Вьетнам.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в нелинейной механике.— М. : Физматгиз, 1963.—410 с.

Вьетнам

Поступила в редакцию
14.07. 1981 г.