УДК 517.9

В. Г. Палюткин

Об асимптотическом поведении спектра одной граничной задачи со спектральным параметром в граничном условии

Для граничной задачи

$$y''(x, \lambda) - q(x)\, y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda); \tag{1}$$

$$y(0, \lambda) = \theta(\lambda)\, y'(0, \lambda), \ \ y'(0, \lambda) = 0, \ \text{если} \ \theta(\lambda) = \infty, \tag{2}$$

где $q(x) \to \infty$ достаточно быстро и регулярно при $x \to \infty$, а θ — функция из некоторого класса мероморфных функций, рассмотрим вопрос о распределении собственных значений в терминах функции

$$\tilde{n}(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t}\, dt, \tag{3}$$

где $n(r)$ — число собственных значений (с учетом кратности), не больших r по модулю.

1. Сформулируем два отправных результата. Условимся под λ^s, $s \in (-\infty, \infty)$, понимать ту ветвь степенной функции, которая положительна при $\lambda > 0$.

Лемма 1. *Пусть функция $q(x)$ в уравнении (1) вещественнозначна, непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:*

$$q(x) \geqslant x^{2+\varepsilon} - c, \ \ 0 \leqslant q'(x) \leqslant (c_0 q(x) + c_1)^{\alpha}, \ \ \alpha < 5/4, \ \varepsilon, \ c, \ c_0, \ c_1 > 0. \tag{4}$$

Тогда: 1) *уравнение* (1) *имеет решение* $y(x, \lambda)$ *вида*

$$y^{(p)}(x, \lambda) = (q(x) + \lambda)^{-\frac{1}{4} + \frac{p}{2}} \exp\left\{-\int_0^x \sqrt{q(\xi) + \lambda}\, d\xi\right\} ((-1)^p + R_p(x, \lambda)),$$

$$R_p(x, \lambda) = O(\Delta(x, \lambda)), \ |x| + |\lambda| \to \infty, \ p = 0, 1, \ x \geqslant 0, \ -\pi < \arg \lambda < \pi; \tag{5}$$

$$\Delta(x, \lambda) = \frac{\langle q(x) + \lambda \rangle^{\alpha} + C\,|\operatorname{Re} \lambda|^{\alpha} + C_1}{\langle q(x) + \lambda \rangle^{3/2}}; \quad \langle \zeta \rangle = \begin{cases} |\zeta|, & \operatorname{Re} \zeta \geqslant 0, \\ |\operatorname{Im} \zeta|, & \operatorname{Re} \zeta \leqslant 0, \end{cases}$$

$$C, \ C_1 > 0;$$

$$2)\ Y_p(x, \lambda) = y^{(p)}(x, \lambda) \exp\{k(\lambda)\}, \ \ k(\lambda) = \int_0^{\infty} (\sqrt{q(\xi) + \lambda} - \sqrt{q(\xi)})\, d\xi, \tag{6}$$

при каждом $x \geqslant 0$ — целые функции порядка $\rho < 1$.

Представление (5) хорошо известно (см. напр., [1], гл. VII, § 22), однако последнее утверждение леммы, а также установление оценки для R_p в достаточно широкой области значений x, λ требуют специального доказательства, которое приведено в [2].

Тот факт, что Y_p, $p=0, 1,$— целые функции, позволяет рассмотреть вопрос о собственных значениях задачи (1), (2) в рамках теории целых функций. При этом оказывается полезной следующая специализация леммы 3 из [3].

Лемма 2. *Пусть* $f(\lambda)=f_m\lambda^m+f_{m+1}\lambda^{m+1}+\ldots, m\geqslant 0, \quad f_m\neq 0,$ — *целая функция конечного порядка и $n(r)$ — число ее нулей (с учетом кратностей) в круге $\{\lambda:|\lambda|\leqslant r\}$; $h(\lambda)$ — функция, аналитическая вне вещественной оси и такая, что в области*

$$G_{\gamma,c,\rho}=\{\lambda:|\operatorname{Im}\lambda|\geqslant c|\operatorname{Re}\lambda|^{\gamma},\ 0<\gamma<1,\ c>0,\ |\lambda|\geqslant\rho>1\} \tag{7}$$

и в ее дополнении $G'_{\gamma,c,\rho}$ до $\{\lambda:|\lambda|>\rho\}$ имеют место соответственно следующие оценки:

$$f(\lambda)/h(\lambda)=1+O(|\lambda|^{-b}),\ b>0,\ |\lambda|\to\infty,\ \lambda\in G_{\gamma,c,\rho}; \tag{8}$$

$$\ln|f(\lambda)/h(\lambda)|\leqslant C(|\ln|\sigma||+|\ln|\tau||)^{\varkappa},\ \varkappa>0,\ \lambda=\sigma+i\tau\in G'_{\gamma,c,\rho},\ C>0. \tag{9}$$

Тогда при любом ε

$$\int_0^r\frac{n(t)-n(0)}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|h(\lambda)|\,d\varphi-\ln|f_mr^m|+O(r^{-b})+O(r^{\gamma-1+\varepsilon}),$$

$$r\to\infty,\ \lambda=re^{i\varphi}.$$

2. Асимптотика функции $\tilde{n}(r)$, соответствующей собственным значениям задачи (1), (2), будет установлена в предположении, что потенциал в уравнении (1) удовлетворяет условиям леммы 1, а мероморфная функция θ в граничном условии обладает следующим свойством:

$$\ln|\theta(\lambda)\sqrt{\lambda}+1|\geqslant\begin{cases}-\mu\ln r,\ \mu<1/4,\ \lambda\in G_{\gamma,c,\rho},\\ -C|\ln|\sin\varphi||^{\varkappa},\ \varkappa>0,\ \lambda\in G'_{\gamma,c,\rho},\end{cases}$$
$$\lambda=re^{i\varphi},\ C\geqslant 0. \tag{10}$$

Заметим, что если оценка (10) имеет место при некоторых $\gamma<1$, $c>0$, то она имеет место и при $\gamma':1>\gamma'\geqslant\gamma$, $c'>c$.

Примерами функций, удовлетворяющих условию (10), могут служить все рациональные функции. Другой класс примеров составляют функции вида (см. [4])

$$\theta_k^{\pm}(\lambda)=\pm a\pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{h_n-(-1)^k\lambda},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n<\infty,\ h_n\to\infty,\ a\geqslant 0,\ A_n,\ h_n\geqslant 0,\ k=0, 1.$$

Действительно, верхняя открытая z-полуплоскость P_z^+ переводится отображением $z\to z\theta_0^+(z^2)+1$ в себя. Следовательно, в силу теоремы 8′ из ([5] гл. I, § 6) имеем $|z\theta_0^+(z^2)+1|\geqslant C|z|^{-1}\sin\psi$, $z=|z|e^{i\Psi}\in P_z^+$, $|z|>1$, $C>0$. Отсюда (после замены $z^2=\lambda$), принимая во внимание равенства $\overline{\theta_0^+(\lambda)}=\theta_0^+(\bar{\lambda})$, заключаем, что

$$|\theta_0^+(\lambda)\sqrt{\lambda}+1|\geqslant C|\sin\varphi|/\operatorname{Re}\sqrt{-\lambda},$$
$$\lambda=re^{i\varphi},\ r>1,\ 0<|\varphi|<\pi. \tag{11}$$

Так как $\{\lambda : \operatorname{Re}\sqrt{-\lambda} > c\} \subseteq G_{1/2,c,\rho}$, то из (11) следует, что для θ_0^+ выполнено второе условие (10) при $\varkappa = 1$, $\gamma = 1/2$, $\rho \gg 0$ любых $c > 0$ и $C > C_\rho$. Выполнимость первого условия (10) для θ_0^+ при $\mu = 0$, $\gamma = 1/2$ и некотором $c > 0$ проверяется непосредственно. Аналогичным образом рассматриваются θ_0^-, $\theta_1^\pm$.

Прежде чем привести точную формулировку результата данной статьи, подчеркнем, что искомая часть асимптотического равенства будет записана в виде нескольких слагаемых, причем одни из них определятся непосредственно через q и θ, а другие — и через спектральные характеристики (терминология заимствована из [6]) задачи (1), (2) при $\theta \equiv \infty$. В связи с этим введем следующие обозначения: $\lambda_{j,n}$, $j = 0, 1$ — n-е собственное значение задачи B_j, $j = 0,1$: (1), $y^{(j)}(0, \lambda) = 0$; φ_n — n-я собственная функция задачи B_1, нормированная условием $\varphi_n(0) = 1$. Нумерацию собственных значений проведем по убыванию величин $\lambda_{j,n}$, начиная с $n = 1$, что возможно в условиях леммы 1 на потенциал в уравнении (1). Заметим, что соответствие $n \leftrightarrow \lambda_{j,n}$ взаимно-однозначно в силу однократности спектров задач B_0 и B_1. Следуя ([6] гл. II § 2), обозначим

$$m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} (\lambda_{1,n} - \lambda)^{-1}, \qquad \alpha_n = \int_0^{\infty} \varphi_n^2(x)\, dx. \tag{12}$$

Т е о р е м а. *Пусть потенциал q в уравнении (1) удовлетворяет условиям леммы 1, а θ — мероморфная функция, обладающая свойством (10) относительно некоторой области $G_{\gamma,c,\rho}$ вида (7) и представленная как $\theta = P/Q$, где P и Q — целые функции конечного порядка без общих нулей, причем*

$$P(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \ldots,\ Q(\lambda) = \lambda^m + q_{m+1}\lambda^{m+1} + \ldots,\ m \geqslant 0, \tag{13}$$

если $Q(\lambda) \not\equiv 0$. Пусть $\tilde{n}(r)$ — функция, отвечающая согласно (3) собственным значениям задачи (1), (2). Тогда

$$\tilde{n}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^r \frac{\psi(t)}{t}\, dt - \frac{\ln r}{4} + \Phi(r) - \Phi_0(r) + O(r^{-d}),\ d > 0,\ r \to \infty, \tag{14}$$

где

$$\psi(t) = \int_{q(\xi)<t} \sqrt{t - q(\xi)}\, d\xi - \int_{q(\xi)<0} \sqrt{-q(\xi)}\, d\xi,$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|P(\lambda)\sqrt{\lambda} + Q(\lambda)|\, d\varphi,\ \lambda = re^{i\varphi}; \tag{15}$$

$$\Phi_0(r) = s\ln r + \ln\left|\sum_{k=0}^{s} q_k h_{s-k-j} - p_{s-j}\right| - \delta_{1,j}\ln|h_{-1}| + K_{1-j}; \tag{15'}$$

$$h_{-1} = \alpha_{n_0}^{-1}, h_s = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \alpha_n^{-1}\lambda_{1,n}^{-s-1},\ s = 0, 1, \ldots;\ h_0 = m(0). \tag{16}$$

В равенствах (15), (15′), (16) положено $p_{-1} = q_0 = \ldots = q_{m-1} = 0$, $q_m = 1$; $k \geqslant 0$, q_k, $k > m$ — те же, что и в (13); $K_0 = \ln|Y_0(0)|$, $K_1 = \ln|Y_1(0)|$; (j, s) — минимальная по алфавитному порядку пара чисел $j = 0, 1$, $s = 0, 1, \ldots$, для которой все слагаемые справа в (15′) конечны. Штрих над знаком суммы означает пропуск номера $n_0 : \lambda_{1,n_0} = 0$.

З а м е ч а н и е 1. В равенстве (15) константа K_0 появляется лишь тогда, когда ее нельзя выразить через K_1 (равенство $K_0 - K_1 = \ln|m(0)|$ теряет определенность). Иногда удобно поменять ролями K_0 и K_1 и, кроме того, выделив ряд альтернативных случаев, определяемых соотношениями между $\theta(0)$, $m(0)$, 0, ∞, представить правую часть (15′) в расшифрованном виде

$$\ln|1-p_0/h_0|+K_0,\ 0\neq m(0)\neq\theta(0)\neq\infty; \tag{17}$$

$$\ln|p_0|-\ln|h_0|+K_0,\ 0\neq m(0)\neq\theta(0)=\infty; \tag{17_1}$$

$$\ln|p_0|+K_1,\ 0=m(0)\neq\theta(0); \tag{17_2}$$

$$s\ln r+\ln\left|\sum_{k=0}^{s} q_k h_{s-k}-p_s\right|-\ln|h_0|+K_0,\ 0\neq m(0)=\theta(0)\neq\infty; \tag{17_3}$$

$$s\ln r+\ln\left|\sum_{k=0}^{s} q_k h_{s-k}-p_s\right|+K_1,\ m(0)=\theta(0)=0; \tag{17_4}$$

$$s\ln r+\ln\left|\sum_{k=1}^{s} q_k h_{s-1-k}-p_{s-1}\right|-\ln|h_{-1}|+K_0,\ m(0)=\theta(0)=\infty. \tag{17_5}$$

Здесь s — минимальное натуральное число, при котором все слагаемые в (17)—(17_5) конечны.

Отметим, что выражению (17) при $m(0)\neq\infty$, $m(0)=\infty$ отвечают соответственно пары (0,0), (1,0) в равенстве (15′), а выражениям (17_1)—(17_5) — пары (0,0), (0,0), (0,s), (0,s), (1,s).

З а м е ч а н и е 2. Если функции $\psi(r)$ и $\Phi(r)$ обладают достаточно регулярным поведением при $r\to\infty$, то теорема позволяет получить асимптотику и для $n(r)$. При этом вклад граничных условий будет определяться асимптотикой функции $r\Phi(r)$. В некоторых случаях этот вклад можно выразить в терминах считающих функций нулей или полюсов функции θ (см. [7]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Сохраним обозначения п. 1. Любое принадлежащее $L_2(0,\infty)$ решение уравнения (1) имеет вид $c(\lambda)\times\times Y_0(x,\lambda)$. Так как при каждом $x\geqslant 0$ $Y_0(x,\lambda)\not\equiv 0$, то собственные значения задачи (1), (2) совпадают с нулями целой функции

$$F(\lambda)=Q(\lambda)Y_0(\lambda)-P(\lambda)Y_1(\lambda)=F_s\lambda^s+F_{s+1}\lambda^{s+1}+\ldots,\ F_s\neq 0,\ s\geqslant 0, \tag{18}$$

если $\theta\not\equiv 0,\infty$, и с нулями функций Y_0 и Y_1 соответственно при $\theta\equiv 0$, $\theta\equiv\infty$. Здесь и далее используются сокращения обозначений леммы 1: $Y_j\equiv Y_j(\lambda)\equiv Y_j(0,\lambda)$, $j=0,1$.

Рассмотрим некоторые равенства, содержащие функции Y_j, $j=0,1$, функцию $m(\lambda)$, введенную в (12), а также спектральные характеристики задач B_j, $j=0,1$. В тех случаях, когда $h_0=m(0)=0,\infty$, наряду с принятой в (12) записью будем использовать представления

$$m(\lambda)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n\lambda_{1,n}(\lambda_{1,n}-\lambda)}=\lambda\mu_0(\lambda),\ m(0)=0; \tag{19}$$

$$m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left({\sum_{n=1}^{\infty}}'\frac{\lambda}{\alpha_n(\lambda_{1,n}-\lambda)}-\frac{1}{\alpha_{n_0}}\right)=\frac{\mu_1(\lambda)}{\lambda},\ m(0)=\infty,\ n_0:\lambda_{1,n_0}=0, \tag{19′}$$

где очевидным образом введены функции $\mu_j(\lambda)$, $j=0,1$; штрих над знаком суммы означает исключение n_0-го слагаемого.

Справедливо равенство

$$m(\lambda)=Y_0(\lambda)/Y_1(\lambda). \tag{20}$$

Действительно, обозначим через $s_i(x,\lambda)$, $j=0,1$, решение уравнения (1) с данными Коши $s_j(0,\lambda)=s'_{1-j}(0,\lambda)=\delta_{1,j}$, $j=0,1$, и определим функцию $f(x,\lambda)=s_0(x,\lambda)+m(\lambda)s_1(x,\lambda)$. Известно [6], что $f\in L_2(0,\infty)$ при λ:

$: \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Следовательно, в условиях теоремы на уравнение (1) имеем $f^{(p)}(x, \lambda) = c(\lambda) Y_p(x, \lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, где $Y_p(x, \lambda)$ — функция, определенная в (6). Сравнивая два приведенных только что представления для функции f и ее производной при $x = 0$, получим (20) для $\lambda : \operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и, следовательно, для всех λ благодаря мероморфности каждой части равенства (20).

Если $m(0) = 0$ или $m(0) = \infty$, то в силу (19), (19′) и (20) имеем

$$Y_j'(0) = \lim_{\lambda\to 0} (Y_{1-j}(\lambda) m(\lambda)^{(-1)^j}/\lambda) = Y_{1-j}(0) \mu_j(0)^{(-1)^j}, \qquad j = 0, 1. \tag{21}$$

Очевидно, $Y_0(0)$ и $Y_1(0)$ не равны нулю одновременно. Поэтому из (21) следует, что при каждом $j = 0, 1$ одно из чисел $Y_j'(0)$, $Y_j(0)$ не равно нулю. Учитывая, что порядки функций Y_j, $j = 0, 1$, строго меньше единицы, заключаем, что представления этих функций каноническими произведениями имеют вид

$$Y_j(\lambda) = Y_j(0) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_{j,n}), \qquad Y_j(0) \neq 0; \tag{22}$$

$$Y_j(\lambda) = Y_j'(0) \lambda \prod_{n=1}^{\infty}{}' (1 - \lambda/\lambda_{j,n}) = \lambda Y_{1-j}(0) \mu_j(0)^{(-1)^j} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_{j,n}), \; Y_j(0) = 0. \tag{22′}$$

Штрих над знаком произведения означает пропуск сомножителя, отвечающего нулевому собственному значению.

Приступим непосредственно к доказательству асимптотической формулы (14). Для этого определим функцию

$$H(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{4}} \exp\{k(\lambda)\} (P(\lambda)\sqrt{\lambda} + Q(\lambda)),$$

где $k(\lambda)$ — та же функция, что и в (6). Очевидно, H — аналитична вне вещественной оси. Подставив асимптотические выражения (5) и (6) в равенство (18), определяющее функцию F, после несложных преобразований отношения F/H получаем

$$\frac{F}{H} = \frac{(1 - R_1)}{1 + O(\lambda^{-1})} \left[1 + \frac{R - 1}{1 + \theta(\lambda)\sqrt{\lambda}}\right], \quad R = \frac{1 + R_0}{1 - R_1} [1 + O(\lambda^{-1})],$$

$$R_j \equiv R_j(\lambda) \equiv R_j(0, \lambda), \qquad j = 0, 1. \tag{23}$$

Выберем число γ' так, чтобы $1 > \gamma' > \gamma$, $\alpha + \mu - 3\gamma'/2 < 0$, где α, μ, γ — те же, что в (4) и (10). Этот выбор возможен, так как $\alpha < 5/4$, $\mu < 1/4$. Тогда из (23), (10) и (5) следует, что

$$F(\lambda)/H(\lambda) = 1 + O(|\lambda|^{-b}), \qquad |\lambda| \to \infty,$$
$$\lambda \in G_{\gamma',c,\rho}, \qquad b = 3\gamma'/2 - \alpha - \mu \tag{24}$$

и, кроме того, при некотором $\varkappa'$

$$\ln\left|\frac{F(\lambda)}{H(\lambda)}\right| \leqslant O\left(\left|\ln\frac{|\lambda|^{\alpha}}{|\operatorname{Im}\lambda|^{3/2}}\right|\right) + O\left(\left|\ln\left|\frac{\lambda}{\operatorname{Im}\lambda}\right|\right|^{\varkappa'}\right) =$$
$$= O(|\ln|\sigma|| + |\ln|\tau||^{\varkappa'}), \quad |\lambda| \to \infty, \quad \lambda = \sigma + i\tau \in G_{\gamma',c,\rho}. \tag{25}$$

Оценки (24) и (25) означают, что условия (9) и (8) леммы 2 выполнены в спецификации $f = F$ и $h \in H$. Согласно этой лемме при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\tilde{n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln|H(\lambda)| \, d\varphi - \ln|F_s r^s| + O(r^{-t+\varepsilon}), \quad r \to \infty, \quad \lambda = re^{i\varphi}. \tag{26}$$

Здесь s и F_s — те же, что и в (18), $t = \min[3\gamma'/2 - \alpha - \mu, 1 - \gamma']$.

Непосредственным подсчетом проверяется совпадение с точностью до $O(r^{-d})$, $d = t - \varepsilon > 0$, первого слагаемого справа в (26) с суммой первых трех слагаемых справа в (14). Остается показать, что второе слагаемое справа в (26) можно отождествить с предпоследним слагаемым справа в равенстве (14), чтобы доказать последнее.

В соответствии с выделенными в (17)—(17_5) вариантами отношений между $m(0)$, $\theta(0)$, 0, ∞ имеем

$$0 \neq m(0) \neq \theta(0) \neq \infty \Rightarrow F_0 = Y_0(0)(1 - p_0/h_0) \neq 0; \tag{27}$$

$$0 \neq m(0) \neq \theta(0) = \infty \Rightarrow F_0 = -Y_0(0)\, p_0/h_0 \neq 0; \tag{27'}$$

$$0 = m(0) \neq \theta(0) \Rightarrow F_0 = -p_0 Y_1(0) \neq 0. \tag{27''}$$

Теперь очевидно, что формула (14) справедлива в случае $m(0) \neq \theta(0)$, если положить $K_0 = \ln|Y_0(0)|$ при $Y_1(0) = 0$ и $K_1 = \ln|Y_1(0)|$ при $Y_1(0) \neq 0$ и сравнить (27) — (27″) с (17) — (17_2).

Пусть теперь $m(0) = \theta(0)$. Выделим следующие случаи.

А) $0 \neq m(0) = \theta(0) \neq \infty$. Тогда имеем

$$F(\lambda) = Y_1(0) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \lambda/\lambda_{1,n})(Q(\lambda)\, m(\lambda) - P(\lambda)).$$

Отсюда, принимая во внимание вытекающие из (12) и (16) равенства $m^{(k)}(0)/k! = h_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$, легко заключаем, что выражение в (17_3) совпадает с $\ln|F_s r^s|$ (см. (18)), причем s — число, определяемое условиями замечания 1.

Б) $m(0) = \theta(0) = 0$, $m(0) = \theta(0) = \infty$. Запишем $F = Y_0(Q\lambda\mu_0 - P)/\lambda\mu_0$ при $m(0) = 0$ и $F = Y_1(Q\mu_1 - P\lambda)/\lambda$ при $m(0) = \infty$, после чего подставим в эти равенства (в соответствии со значениями $m(0)$) приведенные в (2) и (22′) выражения для Y_j, $j = 0, 1$. В результате получаем

$$F(\lambda) = Y_{1-j}(0) \frac{\mu_j(0)^{(-1)^j}}{\mu_j(\lambda)^{1-j}} \prod{}' \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{j,n}}\right)(Q(\lambda)\, \lambda^{1-j} \mu_j(\lambda) - P(\lambda)\, \lambda^j), \tag{28}$$

где $j = 0$ при $m(0) = 0$ и $j = 1$ при $m(0) = \infty$.

Сравнивая (18) и (28) и учитывая при этом, что в силу (16), (19), (19′) $\mu_j^{(k)}(0)/k! = h_{k+(-1)^j}$, $k = 1, 2, \ldots$, $j = 0, 1$, нетрудно подсчитать $\ln|F_s r^s|$ и убедиться в совпадении последнего выражения при $j = 0$ и $j = 1$ соответственно с выражениями, указанными в (17_4) и (17_5) для значения s, упомянутого в замечании 1.

Итак, показано, что второе слагаемое справа в (26) совпадает с нужными выражениями как при $m(0) \neq \theta(0)$, так и при $m(0) = \theta(0)$. Тем самым доказательство формулы (14), а значит, и теоремы завершено.

Заметим, что число s в (17_3)—(17_5) всегда конечно. Действительно, в противном случае $m(\lambda) = \theta(\lambda)$, что исключено условиями теоремы, поскольку в силу равенства (20) и асимптотических равенств леммы 1 функция $m(\lambda)$ не удовлетворяет условиям (10).

В заключение приведем как непосредственное следствие теоремы в применении к задаче (1), (2) с $\theta(\lambda) = \mathrm{const}$ формулы (см. [6], гл. III, § 2)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n(h')}{\lambda_n(h'')} \right| = \left| \frac{1 - h_0/h'}{1 - h_0/h''} \right|, \quad \prod_{n=1}^{\infty}{}' \left| \frac{\lambda_{1,n}}{\lambda_n(h)} \right| = \frac{\lambda_{n_0}(h)\, \alpha_{n_0}}{h},$$

первая из которых имеет место при $h_0 \neq \infty$, а вторая — при $h_0 = \infty$. Здесь $\lambda_n(h')$, $\lambda_n(h'')$, $\lambda_n(h)$ — n-е собственные значения задачи (1), (2) при $\theta = h', h'', h$ соответственно, $h_0 \neq h', h''$, $h \neq 0$; $n_0 : \lambda_{1,n_0} = 0$, штрих над Π означает пропуск номера n_0. Аналогичные формулы легко выписать и в случае $\theta(\lambda) \neq \mathrm{const}$.

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1956.— 526 с.
2. *Палюткин В. Г.* Об асимптотических и аналитических свойствах решения уравнения Штурма — Лиувилля. — В кн.: Качественное исследование дифференциально-функциональных уравнений. Киев : Наук. думка, 1980, с. 100—111.
3. *Палюткин В. Г.* О нулях функций, представимых рядами простых дробей.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 763—772.
4. *Кац И. С., Крейн М. Г.* R-Функции — аналитические функции, отображающие полуплоскость в себя.— В кн.: Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М. : Мир, 1968, с. 629—647.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : ГИТТЛ, 1956.—632 с.
6. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.— Успехи мат. наук, 1964, **19**, вып. 2, с. 3—63.
7. *Авакян В. А.* Распределение собственных значений одной краевой задачи со спектральным параметром в граничном условии.— Там же, 1978, **33**, вып. 1, с. 205—206.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.04. 1979 г.