УДК 517.911

В. П. Скрипник

Вырождающий параметр и вырожденные линейные уравнения

В статье изучается семейство невырожденных линейных систем и предельная вырожденная система. В отличие от [1, 2] матрица при производной зависит от времени, а матрица при производной в вырожденной системе вырождается на множестве положительной меры. Содержание исследования примыкает к работам [3—5] и др.

Пусть E — множество значений параметра ε, которое принадлежит топологическому пространству, удовлетворяющему первой аксиоме отделимости. Предполагаем, что $\varepsilon \in E$, $\varepsilon_0 \in \bar{E}$, $\varepsilon_0 \notin E$. $S(A) = (A + A^*)/2$ — симметрическая часть матрицы A; $\max \lambda [S(A)] = \max \{\lambda_i\}$, $\min \lambda \times \times [S(A)] = \min \{\lambda_i\}$, где λ_i — характеристические корни матрицы $S(A)$; I_α — единичная матрица порядка α; $\|\cdot\|$ — сумма модулей элементов. $K_{Q(t)}[a, b]$, где $Q(t)$ — измеримая и ограниченная на отрезке $[a, b]$ матрица,— множество измеримых и ограниченных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций таких, что произведение матрицы $Q(t)$ на любую вектор-функцию из $K_{Q(t)}[a, b]$ абсолютно непрерывно.

Рассмотрим семейство линейных систем m-го порядка

$$A(t, \varepsilon)\, x' = B(t, \varepsilon)\, x + f(t, \varepsilon). \tag{1}$$

Совокупность следующих условий для систем (1) обозначим через ω. Матрицы $A(t, \varepsilon)$ — симметрические и невырождены. Кратности их характеристических корней не зависят от t и ε. Первый характеристический корень простой. Пусть $\Lambda(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}(\Lambda_1(t, \varepsilon), \Lambda_2(t, \varepsilon), \ldots, \Lambda_k(t, \varepsilon))$, где $\Lambda_i(t, \varepsilon) = \lambda_i(t, \varepsilon) I_{\alpha_i} i = \overline{1, k}$, а $\lambda_i(t, \varepsilon)$ — характеристические корни матриц $A(t, \varepsilon)$. Матрицы $A'(t, \varepsilon)$ и $\Lambda'(t, \varepsilon)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[a, b]$, а семейства $\{A''(t, \varepsilon)\}$ и $\{\Lambda''(t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничены. Семейства $\{A' \times (t, \varepsilon)\}$ и $\{\Lambda'(t, \varepsilon)\}$ сходятся при $t \in [a, b]$. Поэтому семейства $\{A' \times (t, \varepsilon)\}$ и $\{\Lambda'(t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничены на $[a, b]$. Семейства $\{A(t, \varepsilon)\}$ и $\{\Lambda(t, \varepsilon)\}$ сходятся равномерно на $[a, b]$. Кратности характеристических корней матриц $A(t, \varepsilon)$ и $\hat{A}(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} A(t, \varepsilon)$ одинаковы. Имеют место неравенства $|\lambda_1(a, \varepsilon)/\lambda_1(t, \varepsilon)|$, $|\lambda_1'(\tau, \varepsilon)/\lambda_1(t, \varepsilon)| \leqslant M < \infty$, $a \leqslant \tau \leqslant t \leqslant b$. Пусть $\hat{\lambda}_i(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \lambda_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, k}$. Тогда $\hat{\lambda}_1(t) \equiv 0$, $|\hat{\lambda}_i(t)| \geqslant \sigma > 0$, $i = \overline{2, k}$, при $t \in [a, b]$.

Матрицы $B(t, \varepsilon)$ и вектор-функции $f(t, \varepsilon)$ абсолютно непрерывны, а семейства $\{B'(t, \varepsilon)\}$ и $\{f'(t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничены на $[a, b]$. Семейства $\{B(t, \varepsilon)\}$ и $\{f(t, \varepsilon)\}$ сходятся почти всюду на $[a, b]$, поэтому они равномерно ограничены на этом отрезке.

Рассмотрим вырожденную систему

$$(\hat{A}(t) x)' = (\hat{A}'(t) + \hat{B}(t)) x + \hat{f}(t), \tag{2}$$

где $\hat{B}(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} A(t, \varepsilon)$, $\hat{f}(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} f(t, \varepsilon)$. Ее решением на отрезке $[a, b]$, соответствующим начальному условию

$$x(a) = x^0, \tag{3}$$

называется вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $x(a) = x^0$; 2) $x(t) \in K_{\hat{A}(t)}[a, b]$; 3) равенство $(\hat{A}(t) x(t))' = (\hat{A}(t) + \hat{B}(t)) \times x(t) + \hat{f}(t)$ выполняется почти всюду на $[a, b]$.

Определение. *Семейство систем (1) при начальном условии (3) обладает свойством ограниченности на отрезке $[a, b]$, если семейство решений $\{x(t, \varepsilon)\}$ систем (1), удовлетворяющее условию (3), равномерно ограничено на отрезке $[a, b]$.*

Теорема 1. *Пусть для систем (1) выполняются условия ω, а также следующие условия: 1) семейство систем (1) обладает свойством ограниченности на отрезке $[a, b]$ при начальном условии (3); 2) при $a \leqslant \tau < t \leqslant b$*

$$\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\max \lambda [S(A'(\sigma, \varepsilon) + B(\sigma, \varepsilon))]}{\lambda_1(\sigma, \varepsilon)} d\sigma \leqslant M_1(t) < \infty,$$

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \int\limits_{\tau}^{t} \frac{\max \lambda [S(A'(\sigma, \varepsilon) + B(\sigma, \varepsilon))]}{\lambda_1(\sigma, \varepsilon)} d\sigma = -\infty.$$

Тогда существует такое $c \in (a, b]$, что при начальном условии (3) существует решение системы (2) на отрезке $[a, c]$. Из семейства решений систем (1), удовлетворяющих условию (3), можно извлечь последовательность, которая при $t \in [a, c]$ сходится к решению системы (2), удовлетворяющему условию (3).

Доказательство. Рассмотрим k матриц $\hat{A}(t) - \hat{\lambda}_i(t) I_m$, $i = \overline{1, k}$. Ранг i-й матрицы равен $m - \alpha_i$. Для каждой матрицы $\hat{A}(t) - \hat{\lambda}_i(t) I_m$ через $\hat{d}_i(t)$ обозначим минор $m - \alpha_i$-го порядка такой, что $|\hat{d}_i(a)| > 0$. Для всех $i = \overline{1, k}$ существует такое $c \in (a, b]$, что при $t \in [a, c]$ $|\hat{d}_i(t)| \geqslant 2|\hat{d}_i(a)|/3$.

Для каждого $i = \overline{1, k}$ через $d_i(t, \varepsilon)$ обозначим минор $m - \alpha_i$-го порядка матрицы $A(t, \varepsilon) - \lambda_i(t, \varepsilon) I_m$, образованный элементами с теми же номерами, что и минор $\hat{d}_i(t)$. Так как семейства $\{d_i(t, \varepsilon)\}$ сходятся на $[a, c]$ к функциям $\hat{d}_i(t)$, $i = \overline{1, k}$, равномерно, то для всякого $i = \overline{1, k}$ существует такая окрестность $\cup_i(\varepsilon_0)$, что при

$$\varepsilon \in \cup_i(\varepsilon_0) \cap E \text{ и } t \in [a, c] \, | d_i(t, \varepsilon) | \geqslant | \hat{d}_i(a) | /3.$$

Поэтому при $t \in [a, c]$ и $\varepsilon \in \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} \cup_i(\varepsilon_0) \right\} \cap E$ для $i = \overline{1, k}$ $| d_i(t, \varepsilon) | \geqslant \min \times$ $\times \{ | \hat{d}_i(a) | \} /3$. В дальнейшем предполагаем, что $\varepsilon \in \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} \cup_i(\varepsilon_0) \right\} \cap E$.

Рассмотрим любую из k систем

$$(A(t, \varepsilon) - \lambda_i(t, \varepsilon) I_m) \xi = 0, \quad i = \overline{1, k}, \tag{4}$$

Из системы (4) рассмотрим только те уравнения, которые соответствуют минору $d_i(t, \varepsilon)$. Слагаемые, где коэффициенты являются элементы минора $d_i(t, \varepsilon)$, оставим слева, а остальные перенесем вправо. Для каждой такой системы найдем какую-нибудь фундаментальную систему решений и стандартным образом проортонормируем ее. Векторы-столбцы, входящие во все такие фундаментальные системы решений, образуют ортогональную матрицу, которую обозначим через $S(t, \varepsilon)$. При $t \in [a, c]$ имеют место равенства $A(t, \varepsilon) S(t, \varepsilon) = S(t, \varepsilon) \Lambda(t, \varepsilon)$. Обозначим $T(t, \varepsilon) = S^*(t, \varepsilon)$. Тогда при $t \in [a, c]$ $A(t, \varepsilon) = T^*(t, \varepsilon) \Lambda(t, \varepsilon) T(t, \varepsilon)$. Очевидно, семейство $\{T(t, \varepsilon)\}$ равномерно сходится на отрезке $[a, c]$, матрицы $T'(t, \varepsilon)$ абсолютно непрерывны, семейство $\{T'(t, \varepsilon)\}$ сходится при $t \in [a, c]$, а семейство $\{T''(t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничено на этом отрезке. Отсюда следует, что семейство $\{T'(t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничено на $[a, c]$. Пусть $\{x(t, \varepsilon)\}$ — семейство решений систем (1), удовлетворяющее условию (3).

Рассмотрим при $t \in [a, c]$ равенства

$$(A(t, \varepsilon) x(t, \varepsilon))' = (A'(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon)) x(t, \varepsilon) + f(t, \varepsilon). \tag{5}$$

Обозначим $y(t, \varepsilon) = T(t, \varepsilon) x(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon) = T(t, \varepsilon)(A'(t, \varepsilon) + B(t, \varepsilon)) \times$ $\times T^*(t, \varepsilon)$, $F(t, \varepsilon) = T(t, \varepsilon) f(t, \varepsilon)$, $Q(t, \varepsilon) = -T(t, \varepsilon) T^{*'}(t, \varepsilon)$. Тогда из (5) получаем

$$(\Lambda(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon))' = C(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) + Q(t, \varepsilon) \Lambda(t, \varepsilon) y(t, \varepsilon) + F(t, \varepsilon). \tag{6}$$

Очевидно, семейства $\{C(t, \varepsilon)\}$, $\{Q(t, \varepsilon)\}$, $\{F(t, \varepsilon)\}$, $\{\Lambda(t, \varepsilon)\}$ и $\{y(t, \varepsilon)\}$ равномерно ограничены на $[a, c]$. Пусть $y(t, \varepsilon) = \mathrm{col}(y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \ldots, y_m(t, \varepsilon))$. Обозначим $u(t, \varepsilon) = \mathrm{col}(y_2(t, \varepsilon), \ldots, y_m(t, \varepsilon))$, $\Lambda_0(t, \varepsilon) = \mathrm{diag}(\Lambda_2(t, \varepsilon), \ldots$ $\ldots, \Lambda_k(t, \varepsilon))$. Очевидно, семейства $\{\Lambda_0(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon)\}$ и $\{(\Lambda_0(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon))'\}$ равномерно ограничены на $[a, c]$. Поэтому из семейства $\{\Lambda_0(t, \varepsilon) u(t, \varepsilon)\}$ можно извлечь последовательность $\{\Lambda_0(t, \varepsilon_n) u(t, \varepsilon_n)\}$, $\varepsilon_n \to \varepsilon_0$, которая равномерно сходится на отрезке $[a, c]$. Отсюда следует, что равномерно сходится на отрезке $[a, c]$ последовательность $\{u(t, \varepsilon_n)\}$. Пусть $\lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} u(t, \varepsilon_n) = \mathrm{col}(\hat{y}_2(t), \ldots$ $\ldots, \hat{y}_m(t))$ и $C(t, \varepsilon) = (c_{ij}(t, \varepsilon))$, $Q(t, \varepsilon) = (q_{ij}(t, \varepsilon))$, $i, j = \overline{1, m}$, $F(t, \varepsilon) =$ $= \mathrm{col}(F_1(t, \varepsilon), F_2(t, \varepsilon), \ldots, F_m(t, \varepsilon))$. Тогда первое уравнение системы (6) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ запишем в виде

$$\lambda_1(t, \varepsilon_n) y_1'(t, \varepsilon_n) = (-\lambda_1'(t, \varepsilon_n) + c_{11}(t, \varepsilon_n) + q_{11}(t, \varepsilon_n) \lambda_1(t, \varepsilon_n)) y_1(t, \varepsilon_n) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{m} c_{1j}(t, \varepsilon_n) y_j(t, \varepsilon_n) + \sum_{j=2}^{m} q_{1j}(t, \varepsilon_n) \lambda_j(t, \varepsilon_n) y_j(t, \varepsilon_n) + F_1(t, \varepsilon_n). \tag{7}$$

Разделив левую и правую части равенства (7) на $\lambda_1(t, \varepsilon_n)$ и применив формулу вариации произвольных постоянных, получаем, что при $t \in [a, c]$

$$y_1(t, \varepsilon_n) = y_1(a, \varepsilon_n) \exp\left(\int_a^t r(\tau, \varepsilon_n)\, d\tau\right) + \int_a^t \exp\left(\int_\tau^t r(\sigma, \varepsilon_n)\, d\sigma\right) \times$$

$$\times \sum_{j=2}^m \frac{c_{1j}(\tau, \varepsilon_n)\, y_j(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}\, d\tau + \int_a^t \exp\left(\int_\tau^t r(\sigma, \varepsilon_n)\, d\sigma\right) \times$$

$$\times \sum_{j=2}^m \frac{q_{1j}(\tau, \varepsilon_n)\, \lambda_j(\tau, \varepsilon_n)\, y_j(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}\, d\tau + \int_a^t \exp\left(\int_\tau^t r(\sigma, \varepsilon_n)\, d\sigma\right) \frac{F_1(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}\, d\tau, \tag{8}$$

где $r(t, \varepsilon_n) = -\dfrac{\lambda_1'(t, \varepsilon_n)}{\lambda_1(t, \varepsilon_n)} + \dfrac{c_{11}(t, \varepsilon_n)}{\lambda_1(t, \varepsilon_n)} + q_{11}(t, \varepsilon_n)$.

Так как $c_{11}(t, \varepsilon_n) \leqslant \max \lambda\, [S(A'(t, \varepsilon_n) + B(t, \varepsilon_n))]$ (см [1]), то первое слагаемое в (8) при $t \in (a, c]$ стремится к нулю, а при $t = a$ — к y_1^0, где y_1^0 — первая координата вектора $\hat{T}(a)\, x^0$. Здесь $\hat{T}(a) = \lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} T(a, \varepsilon_n)$.

Применяя ко второму слагаемому в (8) формулу интегрирования по частям (это возможно, потому что функция

$$\sum_{j=2}^m \frac{c_{1j}(\tau, \varepsilon_n)\, y_j(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}$$

абсолютно непрерывна на отрезке $[a, c]$), получаем

$$\int_a^t \exp\left(\int_\tau^t r(\sigma, \varepsilon_n)\, d\sigma\right) \sum_{j=2}^m \frac{c_{1j}(\tau, \varepsilon_n)\, y_j(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}\, d\tau = -\sum_{j=2}^m \frac{c_{1j}(t, \varepsilon_n)\, y_j(t, \varepsilon_n)}{c_{11}(t, \varepsilon_n)} +$$

$$+ \exp\left(\int_a^t \frac{c_{11}(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}\, d\tau\right) \exp\left(\int_a^t q_{11}(\tau, \varepsilon_n)\, d\tau\right) \times$$

$$\times \sum_{j=2}^m \frac{c_{1j}(a, \varepsilon_n)\, y_j(a, \varepsilon_n)}{\lambda_1(t, \varepsilon_n)}\, \frac{\lambda_1(a, \varepsilon_n)}{c_{11}(a, \varepsilon_n)} + \int_a^t \exp\left(\int_\tau^t \frac{c_{11}(\sigma, \varepsilon_n)}{\lambda_1(\sigma, \varepsilon_n)}\, d\sigma\right) \times$$

$$\times \left[\exp\left(\int_\tau^t q_{11}(\sigma, \varepsilon_n)\, d\sigma\right) \sum_{j=2}^m \frac{c_{1j}(\tau, \varepsilon_n)\, y_j(\tau, \varepsilon_n)}{\lambda_1(t, \varepsilon_n)}\, \frac{\lambda_1(\tau, \varepsilon_n)}{c_{11}(\tau, \varepsilon_n)}\right]' d\tau.$$

Обозначим $\hat{c}_{1j}(t) = \lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} c_{1j}(t, \varepsilon_n)$, $i = \overline{1, m}$,

$$\hat{q}_{1j}(t) = \lim_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} q_{1j}(t, \varepsilon_n),\ j = \overline{2, m},\ \hat{F}_1(t) = \lim_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} F_1(t, \varepsilon_n).$$

Нетрудно показать, что второе слагаемое в (8) при $t = a$ равно нулю, а при $t \in (a, c]$ оно стремится к

$$-\sum_{j=2}^m \frac{\hat{c}_{1j}(t)\, \hat{y}_j(t)}{\hat{c}_{11}(t)}.$$

Применяя аналогичную процедуру к третьему и четвертому слагаемым в (8), нетрудно показать, что третье слагаемое при $t = a$ равно нулю, а при

$t \in (a, c]$ оно стремится к

$$-\sum_{j=2}^{m} \frac{\hat{q}_{1j}(t)\hat{\lambda}_j(t)\,\hat{y}_j(t)}{\hat{c}_{11}(t)}.$$

Четвертое слагаемое при $t = a$ равно нулю, а при $t \in (a, c]$ оно стремится к $-\hat{F}_1(t)/\hat{c}_{11}(t)$.

Обозначим

$$\hat{y}_1(t) = \begin{cases} y_1^0 & \text{при} \quad t = a, \\ -\sum\limits_{j=2}^{m} \dfrac{(\hat{c}_{1j}(t) - \hat{q}_{1j}(t)\,\hat{\lambda}_j(t))\,\hat{y}_j(t)}{\hat{c}_{11}(t)} - \dfrac{\hat{F}_1(t)}{\hat{c}_{11}(t)} & \text{при } t \in (a, c], \end{cases}$$

$\hat{y}(t) = \mathrm{col}\,(\hat{y}_1(t), \hat{y}_2(t), \ldots, \hat{y}_m(t))$. Тогда при $t \in [a, c]$ $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} y(t, \varepsilon_n) = \hat{y}(t)$. Обозначим $\hat{x}(t) = \hat{T}^*(t)\hat{y}(t)$, где $\hat{T}(t) = \lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} T(t, \varepsilon_n)$. Тогда при $t \in [a, c]$ $\lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} x(t, \varepsilon_n) = \hat{x}(t)$. Из равенств (5) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ получаем равенства

$$A(t, \varepsilon_n)\,x(t, \varepsilon_n) = A(a, \varepsilon_n)\,x^0 + \int_a^t (A'(\tau, \varepsilon_n) + B(\tau, \varepsilon_n))\,x(\tau, \varepsilon_n)\,d\tau + \int_a^t f(\tau, \varepsilon_n)\,d\tau. \tag{9}$$

Переходя к пределу в (9) при $t \in [a, c]$, находим

$$\hat{A}(t)\,\hat{x}(t) = \hat{A}(a)\,x^0 + \int_a^t (\hat{A}'(\tau) + \hat{B}(\tau))\,\hat{x}(\tau)\,d\tau + \int_a^t \hat{f}(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $\hat{x}(t)$ — решение системы (2) на отрезке $[a, c]$, удовлетворяющее начальному условию (3). Теорема 1 доказана.

В дополнение к условиям ω предположим, что для систем (1) и (2) выполняются следующие условия: $\max \lambda\,[S\,(\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))] \leqslant -\mu$, $\mu > 0$; семейства $\{B(t, \varepsilon)\}$ и $\{f(t, \varepsilon)\}$ сходятся при $t \in (a, b]$. Эти расширенные условия обозначим ω_1.

В этом случае решением системы (2) на отрезке $[a, b]$, соответствующим условию (3), называется вектор-функция $x(t)$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $x(a) = x^0$; 2) $x(t) \in K_{\hat{A}(t)}[a, b]$; 3) равенство $(\hat{A}(t)\,x(t))' = (\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))\,x(t) + \hat{f}(t)$ выполняется при $t \in (a, b]$.

Теорема 2. *Пусть для систем (1) и (2) выполняются условия ω_1, а также условия 1) и 2) теоремы 1. Тогда существует такое $\bar{c} \in (a, b]$, что при начальном условии (3) существует единственное решение системы (2) на отрезке $[a, \bar{c}]$. Семейство решений систем (1), удовлетворяющее условию (3), при $t \in [a, \bar{c}]$ сходится к этому решению.*

Доказательство. В силу условий ω_1, $\hat{B}(t)$ и $\hat{f}(t)$ абсолютно непрерывны при $t \in (a, b]$. Так как из $\{A'(t, \varepsilon)\}$ можно извлечь равномерно сходящуюся последовательность, то $\hat{A}'(t)$ непрерывна на $[a, b]$. Это же верно и для $\hat{\Lambda}'(t)$. Таким образом, матрицы $\hat{A}(t)$ и $\hat{\Lambda}(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Преобразуя систему (2) к виду, аналогичному (6), и проводя процедуру, сходную с выполненной в работе [1], покажем, что при начальном условии (3) существует единственное решение $\hat{x}(t)$ системы (2) на некотором отрезке $[a, c_1]$, где $c_1 \in (a, b]$. Существование единственного решения можно доказать и при $\min \lambda\,[S\,(\hat{A}'(t) + \hat{B}(t))] \geqslant \nu$,

$\nu > 0$. Из доказательства теоремы 1 следует существование такого $c_2 \in \in (a, b]$, что на отрезке $[a, c_2]$ имеет место следующее представление: $A(t, \varepsilon) = T^*(t, \varepsilon)\,\Lambda(t, \varepsilon)\,T(t, \varepsilon)$, где $T(t, \varepsilon)$ — ортогональные матрицы. Положим $\bar{c} = \min\{c_1, c_2\}$. Пусть $\{x(t, \varepsilon)\}$ — семейство решений систем (1), удовлетворяющее условию (3). Если это семейство не сходится к решению $\hat{x}(t)$ на отрезке $[a, \bar{c}]$, то существует такая последовательность $\{x(t, \varepsilon_n)\}$, $\varepsilon_n \to \varepsilon_0$, и такое $t_1 \in (a, \bar{c}]$, что $\| x(t_1, \varepsilon_n) \| \geqslant \delta_1 > 0$. В силу теоремы 1 из последовательности $\{x(t, \varepsilon_n)\}$ можно извлечь подпоследовательность, которая при $t \in [a, \bar{c}]$ сходится к решению системы (2), удовлетворяющему условию (3). В силу единственности эта подпоследовательность сходится к решению $\hat{x}(t)$. Таким образом, мы получаем противоречие. Теорема доказана.

1. *Скрипник В. П.* Вырождающий параметр и вырожденные уравнения.— Литов. мат. сб. 1980, **20**, № 1, с. 165—173.
2. *Скрипник В. П.* Вырожденные системы и малый параметр при производной.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 3, с. 454—461.
3. *Тихонов А. Н.* Системы, содержащие малые параметры при старших производных.— Мат. сб., 1952, **31**, № 3, с. 575—586.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.—272 с.
5. *Градштейн И. С.* Применение теории устойчивости А. М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.— Докл. АН СССР, 1952, **82**, № 1, с. 5—8.

Московский
лесотехнический институт

Поступила в редакцию
20.03. 1981 г.