УДК 517.9

Р. И. Собкович

Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения первого порядка с несколькими параметрами

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m), \tag{1}$$

где функция $f(t, x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ определена и непрерывна в области $D = \{(t, x, \lambda_1, \ldots, \lambda_m): t \in [0, T], \quad x \in [x_0 - r, x_0 + r] = I, \ \lambda_i \in [-\rho_i, \rho_i] = J_i, \ i = 1, \ldots, m\}$. Кроме решения данного уравнения нас будет интересовать существование и отыскание таких значений параметров λ_i, $i = 1, \ldots, m$, при которых удовлетворяются условия

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, \ldots, m; \qquad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T. \tag{2}$$

Обозначим через $C^k[t_0, 0, T]$ и $C^k[t_0, \ldots, t_m; 0, T]$ множества функций, определенных непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых при $t \in [0, T]$ и удовлетворяющих условиям $x(t_0) = x_0$ и $x(t_i) = x_i$, $i = 0, \ldots, m$, соответственно. Очевидно, что $C^k[t_0; 0, T] \supset C^k[t_0, \ldots, t_m; 0, T]$.

Определение. *Множество $(x^*(t), \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ будем называть решением задачи (1), (2), если функция $x^*(t) \in C^1[t_0, \ldots, t_m; 0, T]$ со значениями в I удовлетворяет при $\lambda_i = \lambda_i^*$, $i = 1, \ldots, m$, уравнению (1).*

Задача (1), (2) при $m > 2$ впервые исследовалась в работе [1]. Отметим, что в отличие от указанной работы, где решение искалось итерационным методом на множестве $C^1[t, 0, T]$, причем условиям (2) удовлетворяла, вообще говоря, только предельная функция, ниже предлагается способ преобразования поставленной задачи к такому виду, когда все приближения к $x^*(t)$ принадлежат $C^1[t_0, \ldots, t_m; 0, T]$.

Рассмотрим оператор

$$L_m[f(t, x, \Lambda)] = \sum_{i=0}^{m} c_i P_{mi}(t) \left(\int_{t_i}^{t} f(s, x(s), \Lambda)\, ds + x_i \right) \tag{3}$$

и заменим задачу (1), (2) эквивалентной системой

$$x(t) = L_m[f(t, x, \Lambda)]; \tag{4}$$

$$F(x, \Lambda) = 0, \tag{5}$$

где

$$F = (F_1, \ldots, F_m)^T, \quad F_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(s, x(s), \Lambda)\, ds + x_{i-1} - x_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T, \quad e_i = \frac{1}{\prod\limits_{j=0, j\neq i}^{m} (t_i - t_j)}, \qquad P_{mi}(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{m} (t - t_j),$$

T — знак транспонирования. В самом деле, дифференцируя равенство (4) с учетом тождества $\sum\limits_{i=0}^{m} c_i P_{mi}(t) = 1$, приходим к соотношению

$$x' = f(t, x, \Lambda) + \sum_{i=1}^{m} r_i(t) \left(\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, x(t), \Lambda)\, dt + x_{i-1} - x_i \right), \tag{6}$$

$$r_1(t) = c_0 P'_{m0}(t), \quad r_{i+1}(t) = c_i P'_{mi}(t) - r_i(t), \quad i = 1, \ldots, m-1,$$

откуда легко заключить, что множества решений задач (1), (2) и (4), (5) совпадают. Будем полагать в дальнейшем $t_i = \frac{iT}{m}$, $i = 0, \ldots, m$, и отметим, что в этом случае выполняются соотношения

$$c_i = (-1)^m c_{m-i}, \quad i = 0, \ldots, m; \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{m} (i+1)^k c_i = \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \ldots, m-1, \\ \dfrac{m^m}{T^m}, & \text{если } k = m; \end{cases} \tag{8}$$

$$\sigma(m) = \sum_{i=0}^{m} |c_i| = \frac{2^m m^m}{m!\, T^m}. \tag{9}$$

Для решения уравнения (4) построим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t, \Lambda) = L_m[f(t, x_n, \Lambda)], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

приняв $x_0(t, \Lambda) = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i P_{mi}(t)\, x_i$. Пусть $f(t, x, \Lambda)$ удовлетворяет в D условию

$$|f(t, x, \Lambda) - f(t, \bar{x}, \Lambda)| \leqslant K|x - \bar{x}|, \quad K \geqslant 0, \tag{11}$$

и выполняются неравенства

$$|f(t, x, \Lambda)| \leqslant M, \quad \sigma(m) M P_{m+1} + \|x_0(t) - x_0\|_c \leqslant r,$$

$$P_{m+1} = \left\| \prod_{i=0}^{m} (t - t_i) \right\|_c, \quad \|\cdot\|_c = \max_{t\in[0, T]} |\cdot|; \tag{12}$$

$$q_1 = \sigma(m) P_{m+1} K < 1. \tag{13}$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Если функция $f(t, x, \Lambda)$ определена и непрерывна в D и в данной области выполняются неравенства (11)—(13), то последователь-*

ные приближения (10) сходятся равномерно по $t \in [0, T]$ *к функции* $x^*(t, \Lambda) \in C^1[t_0, \ldots, t_m; 0, T]$ *со значениями в* I, *которая удовлетворяет уравнению (6), и имеет оценку погрешности*

$$\| x_n(t, \Lambda) - x^*(t, \Lambda) \|_c \leqslant \frac{q_1^n}{1 - q_1} \sigma(m) MP_{m+1}, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{14}$$

Из сформулированной теоремы следует, что $x^*(t, \Lambda)$ будет решением задачи (1), (2), если существует $\Lambda = \Lambda^* \in D_m = J_1 \times \ldots \times J_m$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\Delta_i(\Lambda) \equiv \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, x^*(t, \Lambda), \Lambda)\, dt + x_{i-1} - x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Очевидно, что явное выражение для $x^*(t, \Lambda)$, вообще говоря, неизвестно, поэтому для исследования системы (15) наряду с отображением $\Delta(\Lambda) = (\Delta_1(\Lambda), \ldots, \Delta_m(\Lambda))^T$ будем рассматривать функции

$$\widetilde{\Delta}_n(\Lambda) = (\Delta_{1n}(\Lambda), \ldots, \Delta_{mn}(\Lambda))^T, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\Delta_{in}(\Lambda) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, x_n(t, \Lambda), \Lambda)\, dt + x_{i-1} - x_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Используя результаты работы [3], можно указать критерий, как по нулям отображения $\widetilde{\Delta}_n(\Lambda)$ судить о существовании нулей вектор-функции $\Delta(\Lambda)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а также при некотором* n *существует замкнутая выпуклая область* $\tilde{D} \subset D$, *имеющая единственную изолированную точку* Λ° *с ненулевым индексом такую, что* $\Delta_n(\Lambda^\circ) = 0$, *причем на границе* $\Gamma_{\tilde{D}}$ *выполняется неравенство*

$$\inf_{\Lambda \in \Gamma_{\tilde{D}}} |\Delta_n(\Lambda)| \geqslant \frac{q_1^n}{1 - q_1} \sigma(m) MP_{m+1}.$$

Тогда существует единственное решение $(x^*(t), \Lambda^*)$ *задачи (1), (2).*

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 7.1 из [4].

Построим итерационный процесс, дающий возможность получать решение системы уравнений (4), (5) в виде последовательных приближений. Определим $x_n(t)$ с помощью соотношения

$$x_{n+1}(t) = L_m[f(t, x_n, \Lambda_n)], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

приняв $x_0(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i P_{mi}(t) x_i$, а Λ_n определим как решение системы

$$F(x_n, \Lambda_n) = 0. \tag{17}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия: 1)* m*-мерная вектор-функция* $F(\Lambda)$ *определена и непрерывна в области* D_m; *2) существует постоянная обратимая матрица* A *такая, что для любых* $\Lambda', \Lambda'' \in D_m^b$ *выполняется неравенство*

$$|F(\Lambda') - F(\Lambda'') - A(\Lambda' - \Lambda'')| \leqslant B |\Lambda' - \Lambda''|, \tag{18}$$

B *— постоянная неотрицательная матрица; 3) все собственные числа матрицы* $|A^{-1}| B$ *лежат в единичном круге; 4) имеет место соотношение*

$$|A^{-1}| \{B\rho + |F(\Theta)|\} \leqslant \rho, \ \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)^T, \ \Theta \text{ — нуль-вектор}. \tag{19}$$

Тогда система уравнений $F(\Lambda) = 0$ *имеет единственное решение* $\Lambda^* \in D_m$.

Доказательство леммы можно провести методом сжатых отображений.

Рассмотрим некоторые признаки существования матрицы A, удовлетворяющей условиям 2), 3) в случае системы (17).

Лемма 2. *Если функция* $f(t, x, \Lambda)$ *линейно зависит от* λ_i, $i=1,\dots,m$, *т. е.* $f(t, x, \Lambda) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t, x)\lambda_i$ *и* $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{m} \neq 0$, *где* $a_{ij} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varphi_j(t, x(t))\,dt$ *при заданном* $x(t) \in I$, *то можно принять* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$.

Лемма 3. *Если функция* $f(t, x, \Lambda)$ *непрерывно дифференцируема по* λ_i, $i = 1, \dots, m$, *и при заданном* $x(t) \in I$ *выполняется одно из условий*

$$\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_i} dt\right| \geqslant \sum_{i=1, j\neq i}^{m} c_{ij}, \qquad \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_i} dt\right| \geqslant \sum_{i=1, j\neq i}^{m} c_{ji}, \tag{20}$$

где $f'_{\lambda_i} = f'_{\lambda_i}(t, x, \Lambda)$, $c_{ij} = \max_{\Lambda \in D_m}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_j} dt\right|$, *то можно принять* $A = \operatorname{diag}(a_{ii})$, $a_{ii} = a \operatorname{sign} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_i} dt$, $a = \max_i c_{ii}$, $i = 1, \dots, m$.

Лемма 4. *Пусть для непрерывно дифференцируемой по* λ_i, $i=1,\dots,m$, *функции* $f(t, x, \Lambda)$ *при заданном* $x(t) \in I$ *существует* $\tilde{\Lambda} \in D_m$ *такое, что* $\det J(\tilde{\Delta}) \neq 0 \left(J(\Delta) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \lambda_j}\right)_{i,j=1}^{m}\right)$ *и при всех* $\Lambda \in D_m$ *выполняется неравенство* $|J(\Lambda) - J(\tilde{\Lambda})| \leqslant \tilde{B}$, *где* $\tilde{B}$ — *постоянная неотрицательная матрица. Тогда, если все собственные числа матрицы* $|J^{-1}(\tilde{\Lambda})|\tilde{B}$ *лежат в единичном круге, то можно положить* $A = J(\tilde{\Lambda})$.

Доказательство лемм 2,4 очевидно. В случае леммы 3 отметим, что запись $a \operatorname{sign} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_i} dt$ имеет смысл, так как из неравенств (20) вытекает, что вследствие непрерывности f'_{λ_i} по Λ при всех $\Lambda \in D_m$ $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_i} dt \neq 0$. Легко проверяется выполнимость условия 2) и устанавливается, что $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{m}$, $b_{ij} = c_{ij}$, $i \neq j$; $b_{ii} = a - \bar{c}_{ii}$, $\bar{c}_{ii} = \min_{\Lambda \in D_m}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'_{\lambda_i} \mathrm{dt}\right|$. Наибольшее собственное число матрицы $|A^{-1}|B = \frac{1}{a}B$ в силу теоремы Перрона [5] действительно, неотрицательно и не превышает $\frac{1}{a}\min\left\{\max_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij}, \max_i \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\right\}$, что с учетом неравенств (20) обеспечивает выполнение условия 3).

Пусть в области D функция $f(t, x, \Lambda)$ удовлетворяет условию

$$|f(t, x, \Lambda) - f(t, \bar{x}, \bar{\Lambda})| \leqslant K|x - \bar{x}| + N\|\Lambda - \bar{\Lambda}\|, \quad K, N \geqslant 0, \tag{21}$$

а также выполняются неравенства

$$\sigma(m) MP_{m+1} + \|x_0(t) - x_0\|_c \leqslant r; \tag{22}$$

$$\||A^{-1}|B\| < 1; \tag{23}$$

$$q_2 = \sigma(m) KP_{m+1}\left(1 + \frac{NT\|A^{-1}\|}{m(1 - \||A^{-1}|B\|}\right) < 1. \tag{24}$$

Теорема 3. *Если функция* $f(t, x, \Lambda)$ *определена и непрерывна в области* D *и при всех* $x(t) \in I$ *система (17) удовлетворяет условиям леммы 1, то при выполнении неравенств (21)—(24) задача (1), (2) имеет единст-*

венное решение $(x^*(t), \Lambda^*)$, к которому сходятся равномерно по $t \in [0, T]$ последовательности $x_n(t)$ и $\{\Lambda_n\}$, определенные соотношениями (16) (17). Оценки погрешностей задаются при этом неравенствами

$$\| x_n(t) - x^*(t)\|_c \leqslant \frac{q_2^n}{1-q_2}\sigma(m) M P_{m+1}; \tag{25}$$

$$\| \Lambda_n - \Lambda^* \| \leqslant \frac{q_2^n}{1-q_2}\sigma(m) M P_{m+1} \frac{\| A^{-1} \| KT}{m(1-\| |A^{-1}| B\|)}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{26}$$

Осуществление изложенного выше итерационного процесса связано с решением при каждом n системы (17). Чтобы избежать этого неудобства, построим последовательные приближения по формулам

$$x_{n+1}(t) = L_m[f(t, x_n, \Lambda_n)]; \tag{27}$$

$$\Lambda_{n+1} = \Lambda_n - A^{-1}F(x_n, \Lambda_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

приняв $x_0(t) = L_m[0]$, $\Lambda_0 = \Theta$ и предположив, что существует постоянная обратимая матрица A, удовлетворяющая при любых Λ', $\Lambda'' \in D_m$ и $x(t) \in I$ условию

$$|F(x, \Lambda') - F(x, \Lambda'') - A(\Lambda' - \Lambda'')| \leqslant B|\Lambda' - \Lambda''|, \tag{29}$$

и что выполняются неравенства

$$\max_{(t,x,\Theta)\in D} |f(t, x, \Theta)| \leqslant M_0, \quad \| A^{-1} \| M_0 T \leqslant m(1 - \| |A^{-1}| B\|)\|\rho\|. \tag{30}$$

Теорема 4. *Пусть функция $f(t, x, \Lambda)$ определена и непрерывна в области D, существует постоянная обратимая матрица A, удовлетворяющая при любых Λ', $\Lambda'' \in D_m$ и $x(t) \in I$ условию (29) и выполняются неравенства (21)—(23), (30). Тогда, если большее собственное число матрицы*

$$S = \begin{pmatrix} \sigma(m) P_{m+1} K & \sigma(m) P_{m+1} N \\ \dfrac{\| A^{-1} \| KT}{m} & \| |A^{-1}| B\| \end{pmatrix}$$

меньше единицы, то последовательные приближения $x_n(t)$, Λ_n, определенные соотношениями (27), (28) сходятся к единственному решению задачи (1), (2). Оценки погрешностей задаются при этом векторным неравенством

$$\begin{pmatrix} \| x_n(t) - x^*(t)\|_c \\ \| \Lambda_n - \Lambda^* \| \end{pmatrix} \leqslant S^n(\bar{I} - S)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma(m) P_{m+1} M \\ \| A^{-1} F(x_0(t), \Theta)\| \end{pmatrix}, \quad \bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$n = 0, 1, \ldots.$$

Замечание. Очевидно, что в случаях обоих итерационных процессов при всех $n = 0, 1, \ldots$ $x(t) \in C^1[t_0, \ldots, t_m; 0, T]$.

Предложенный выше алгоритм применим для решения задачи Валле Пуссена: для дифференциального уравнения

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)}) \tag{31}$$

отыскать решение, удовлетворяющее условиям

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 1, \ldots, m; \quad t_1 < t_2 < \ldots < t_m, \quad t_m - t_1 = T. \tag{32}$$

В дальнейшем будем полагать, что $t_{i+1} - t_i = T/(m-1)$, $i = 1, \ldots, m-1$. Пусть функция $f(t, x, x', \ldots, x^{(m-1)})$ определена и непрерывна в некоторой замкнутой области $\overline{D} \subset R^{m-1}$ и удовлетворяет в ней условию Липшица

$$|f(t, x, \ldots, x^{(m-1)}) - f(t, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{(m-1)})| \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} K_i |x^{(m-i-1)} - \bar{x}^{(m-i-1)}|. \tag{33}$$

Преобразуем задачу (31), (32) к виду

$$x(t) = \bar{L}_m[f(t, x, \ldots, x^{(m-1)})] \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} c_i P_{mi}(t) \Bigg[\underbrace{\int_{t_i}^{t} \int_{0}^{t} \ldots \int_{0}^{t}}_{m-1} f(s, \ldots, x^{(m-1)}(s))\, ds \ldots dt dt + x_i \Bigg]. \tag{34}$$

Легко убедиться, что уравнение (31) с краевыми условиями (32) и уравнение (34) эквивалентны.

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_{n+1}(t) = \bar{L}_m[f(t, x_n, \ldots, x_n^{(m-1)})], \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{35}$$

где $x_0(t) = \bar{L}_m[0]$, а значения $x_{n+1}^{(j)}(t)$ находятся дифференцированием равенства (35)

$$x_{n+1}^{(j)}(t) = \int_{0}^{t} \frac{(t-s)^{m-j-1}}{(m-j-1)!} f(s, \ldots, x_n^{(m-1)}(s))\, ds - \sum_{i=1}^{m} c_i P_{mi}^{(j)}(t) \times$$

$$\times \Bigg[\int_{0}^{t_i} \frac{(t_i - s)^{m-1}}{(m-1)!} f(s, \ldots, x_n^{(m-1)}(s))\, ds - x_i \Bigg]. \tag{36}$$

При этом будем считать область $\bar{D}$ такой, что $0 \in [t_1, t_m], (t, \ldots, x_n^{(m-1)}) \in \bar{D}$ при всех $n = 0, 1, \ldots$. Положим $r_n = \sum_{i=0}^{m-1} K_i \| x_n^{(m-i-1)} - x_{n-1}^{(m-i-1)} \|_c$. Тогда, используя (33), в случае $m = 2k + 1$ получаем

$$| x_{n+1}(t) - x_n(t) | \leqslant \sum_{i=1}^{2k+1} | c_i | \, | P_{2k+1,i}(t) | \left| \int_{t_i}^{t} \frac{s^{2k}}{(2k)!}\, ds \right| r_n =$$

$$= \frac{2P_{2k+1}(t)}{(2k+1)!} \sum_{i=1}^{k+1} | c_i | \left(\frac{1}{2} t^{2k} + t_i^2 t^{2(k-1)} + \ldots + t_i^{2k} \right) r_n = p_0'(t), \tag{37}$$

а при $m = 2k$

$$| x_{n+1}(t) - x_n(t) | \leqslant \frac{1}{(2k)!} \Bigg[\sum_{i=1}^{k} | c_i | \, | P_{2k,i}(t) | \, (t^{2k} + t_i^{2k}) +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{2k} | c_i | \, | P_{2k,i}(t) | \, | t^{2k} - t_i^{2k} | \Bigg] r_n = p_0''(t), \ t \geqslant 0; \ p_0''(t) = p_0''(-t). \tag{38}$$

В обоих случаях

$$| x_{n+1}^{(j)}(t) - x_n^{(j)}(t) | \leqslant \Bigg[\frac{| t |^{m-j}}{(m-j)!} + \sum_{i=1}^{m} | c_i | \, | P_{mi}^{(j)}(t) | \frac{| t_i |^m}{m!} \Bigg] r_n = p_j(t)\ r_n,$$

$$j = 1, \ldots, m-1. \tag{39}$$

Пусть $p_0'(t)$, $p_0''(t) \leqslant p_0(t) \leqslant p_0$; $p_j(t) \leqslant p_j$, $j = 1, \ldots, m-1$. Тогда из соотношений (37) — (39) находим

$$r_{n+1} \leqslant \sum_{0}^{m-1} K_i p_{m-i-1} r_n = q_m r_n. \tag{40}$$

Следовательно, если $q_m < 1$, то последовательности функций $x_n(t)$ и их производных сходятся соответственно к функции $x^*(t) \in C^m[t_1, \ldots, t_m; t_1, t_m]$ и ее производным, которые принимают значения в $\overline{D}$ и удовлетворяют уравнению (34).

Приведем примеры констант q_m, показывающие, что полученные изложенным выше способом оценки улучшают результаты [2]. Для сравнения рядом выписаны оценки q'_m из указанной работы.

$$q_2 = \frac{1}{8} T^2 K_1 + \frac{3}{4} T K_0,$$

$$q_3 = \frac{\sqrt{2}}{96} T^3 K_2 + \frac{5}{24} T^2 K_1 + \frac{2}{3} T K_0,$$

$$q_4 = \frac{5}{8824} T^4 K_3 + \frac{1}{36} T^3 K_2 + \frac{1}{6} T^2 K_1 + \frac{31}{48} K_0,$$

$$q'_2 = \frac{1}{2} T^2 K_1 + T K_0,$$

$$q'_3 = \frac{1}{6} T^3 K_2 + \frac{1}{2} T^2 K_1 + T K_0,$$

$$q'_4 = \frac{1}{24} T^4 K_3 + \frac{1}{6} T^3 K_2 + \frac{1}{2} T^2 K_1 + T K_0.$$

В работах [6, 7] достаточные условия разрешимости задачи Валле Пуссена получены в виде неравенств

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m-k}{k!m} T^k K_{k-1} + \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m m!} T^m K_{m-1} \leqslant 1,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{T^k}{2^k k \left[\frac{k-1}{2}\right]! \left[\frac{k}{2}\right]!} K_{k-1} \leqslant 1. \tag{41}$$

Сравнение (40) и (41) при $m = 3, 4$ показывает, что полученные оценки дополняют результаты [6, 7].

Замечание. Более точные значения q_m можно получить, если при оценке разностей $|x_{n+1}^{(j)}(t) - x_n^{(j)}(t)|$ в соотношения (37)—(39) вместо q_m подставлять выражения $q_m(t) = \sum_{i=0}^{m-1} K_{m-i-1} p_i(t)$.

1. *Курпель Н. С., Марусяк А. Г.* Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 2, с. 223—226.
2. *Ch. J. de la Valée Pousin.* Sur léquation differentielle du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignées. Ertension aux équations d'ordre *n*. — Math. pures et. appl., 1929, **9**, N 8, p. 125—144.
3. *Александров П. С.* Комбинаторная топология.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.— 660 с.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища школа, 1976.— 181 с.
5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1969.— 351 с.
6. *Бессмертных Г. А., Левин А. Ю.* О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной.— Докл. АН СССР, 1962, **114**, № 3, с. 471—474.
7. *Левин А. Ю.* Оценка функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных.— Мат. сб., 1964, **64**, № 3, с. 396—409.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
23.04.1981 г.