УДК 534.111

Б. И. Сокил

Об асимптотических разложениях краевой задачи для одного нелинейного уравнения с частными производными

Рассмотрим вопрос о применении специальных периодических Ateb-функций [1] к построению в «нерезонансном» случае одночастотных асимптотических решений [2] для нелинейного неавтономного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \nu t\right), \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $n + 1 = (2m + 1)/(2r + 1)$, $m, r = 0, 1, 2, \ldots, t \geqslant 0$, ε — малый параметр, $f(x, u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial t, \partial^2 u/\partial x^2, \nu t$ — аналитическая 2π-периодическая по νt функция. К исследованию уравнения (1) приводится, например, задача о распространении нелинейных упругих волн в стержне с нелинейным законом упругости [3].

Заметим, что для квазиволнового ($n = 0$) уравнения (1) задача при соответствующих условиях рассматривалась в [4], а на существование периодических решений для невозмущенного ($\varepsilon = 0$) уравнения (1) указано в [5].

Для уравнения (1) рассматриваются, например, следующие краевые условия:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Используя асимптотические методы нелинейной механики, первое приближение одночастотного решения дифференциального уравнения (1) представим в виде

$$u_{1k}(x, t) = aX_k(x)\,T_k(\psi_k) + \varepsilon U_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi), \quad \varphi = \nu t, \tag{3}$$

где aX_kT_k — решение невозмущенной краевой задачи (1), (2), которое выражается через периодические Ateb-функции

$$X_k(x) = X_0 \operatorname{ca}\left(1, \frac{1}{n+1}, \left(\lambda_k \frac{n+2}{2X_0}\right)^{\frac{1}{n+2}} x\right),$$
$$T_k(\psi_k) = T_0 \operatorname{ca}(n+1, 1, \psi_k), \quad a = X_0 T_0. \tag{4}$$

Неизвестный параметр λ_k в (4), исходя из свойств периодических Ateb-функций, запишем в виде

$$\lambda_k = 2X_0^n (n+2)^{-1}/(l^{-1} k \Pi_x)^{n+2}. \tag{5}$$

$2\Pi_x$ — период использованной периодической $\operatorname{ca}\left(1, \frac{1}{n+1}, \left(\lambda_k \frac{n+2}{2X_0}\right)^{\frac{1}{n+2}} x\right)$ функции, т. е.

$$\Pi_x = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\Big/\left(2\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n+1}{n+2}\right)\right). \tag{6}$$

Параметры a и ψ_k в соотношениях (3) связаны дифференциальными зависимостями

$$da/dt = \varepsilon A_{1k}(a, \varphi), \quad d\psi_k/dt = \omega_k(a) + \varepsilon B_{1k}(a, \varphi), \tag{7}$$

в которых

$$\omega_k(a) = \left[\alpha a^n \left(\frac{k\Pi_x}{l}\right)^{n+2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

а функции $A_{1k}(a, \varphi)$ и $B_{1k}(a, \varphi)$ определяются так, чтобы соотношение (3) удовлетворяло с точностью до ε^2 исходному уравнению (1).

Для однозначности определения функций $A_{1k}(a, \varphi)$ и $B_{1k}(a, \varphi)$ на 2π-периодичную по φ функцию $U_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi)$ налагаются условия

$$\int\limits_0^{2\Pi_T} \left\{ U_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi) \begin{matrix} \mathrm{ca}(n+1, 1, \psi_k) \\ \mathrm{sa}(1, n+1, \psi_k) \end{matrix} \right\} d\psi_k = 0, \tag{9}$$

указывающие на отсутствие в ней членов, содержащих основные гармоники ψ_k. В выражении (9) $2\Pi_T$ — период $\mathrm{ca}(n+1, 1, \psi_k)$ и $\mathrm{sa}(1, n+1, \psi_k)$, т. е.

$$\Pi_T = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right) \Big/ \left(2\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right)\right). \tag{10}$$

Из (1), с учетом (3) — (7) получаем дифференциальную зависимость

$$\frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \psi_k^2}\omega_k^2 + \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \psi_k \partial \varphi}\omega_k \nu + \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial \varphi^2}\nu^2 - \alpha \frac{d}{dx}\left[\left(a\frac{dX_k}{dx}T_k\right)^n \frac{\partial U_{1k}}{\partial x}\right] =$$
$$= \Phi_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi) - \beta_k(a, x, \psi_k) A_{1k}(a, \varphi) - \gamma_k(a, x, \psi_k) B_{1k}(a, \varphi), \tag{11}$$

в которой

$$\Phi_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi) = f\left(x, aX_kT_k, a\frac{dX_k}{dx}T_k, aX_k\frac{dT_k}{d\psi_k}\omega_k, a\frac{d^2X_k}{dx^2}T_k\nu t\right),$$

$$\beta_k(a, x, \psi_k) = \left(2\omega_k - a\frac{d\omega_k}{da}\right)X_k\frac{dT_k}{d\psi_k}, \ \gamma_k(a, x, \psi_k) = 2a\omega_k X_k \frac{d^2T_k}{d\psi_k^2}.$$

Представляя функции $\Phi_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi)$, $U_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi)$, $A_{1k}(a, \varphi)$ и $B_{1k}(a, \varphi)$ в виде рядов

$$U_{1k}(a, x, \psi_k, \varphi) = \sum_p U_{1k}^p(a, x, \psi_k)\exp(ip\varphi), \ A_{1k}(a, \varphi) = \sum_p A_{1k}^p(a)\exp(ip\varphi),$$
$$\Phi_{1k}(a, x, \psi_k, \psi) = \sum_p \Phi_{1k}^p(a, x, \psi_k)\exp(ip\varphi), \ B_{1k}(a, \varphi) = \sum_p B_{1k}^p(a)\exp(ip\varphi), \tag{12}$$

из (11) имеем

$$L(U_{1k}^p) = \Phi_{1k}^p(a, x, \varphi_k) - \beta_k(a, x, \psi_k)A_{1k}^p(a) - \gamma_k(a, x, \psi_k)B_{1k}^p(a); \tag{13}$$

$$L(U_{1k}^p) = \frac{\partial^2 U_{1k}^p}{\partial \psi_k^2}\omega_k^2 + 2ip\frac{\partial U_{1k}^p}{\partial \psi_k}\omega_k\nu - \nu^2 p^2 U_{1k}^p - \alpha\frac{d}{dx}\left[\left(a\frac{dX_k}{dx}T_k\right)^n \frac{\partial U_{1k}^p}{\partial x}\right]. \tag{14}$$

Лемма. *Пусть* $L(U_{1k}^p)$ — *оператор вида (14), а* $U_{1k}^p(a, x, \psi_k)$ — *непрерывные вместе со своими частными производными по* x *и* ψ_k *до второго порядка включительно* $2\Pi_T$ *-периодичные по* ψ_k *функции, удовлетворяющие условиям, аналогичным (9), тогда выполняются тождества*

$$\int\limits_0^{2\Pi_T}\int\limits_0^{l}\left\{L(U_{1k}^p)X_k(x) \begin{matrix} \mathrm{ca}(n+1, 1, \psi_k) \\ \mathrm{sa}(1, n+1, \psi_k) \end{matrix}\right\} dx d\psi_x = 0. \tag{15}$$

Справедливость леммы легко устанавливается интегрированием по частям с учетом условий, вытекающих из (9).

Используя соотношение (15), из (13) получаем выражения для $A^p_{1k}(a)$ и $B^p_{1k}(a)$

$$A^p_{1k}(a) = \frac{\Phi^p_s(a)\,\gamma_c(a) - \Phi^p_c(a)\,\gamma_s(a)}{X_0\beta_s(a)\,\gamma_c(a)}\,X_0, \quad B^p_{1k}(a) = -\frac{\Phi^p_c(a)}{X_0\gamma_c(a)}\,X_0, \tag{16}$$

где

$$\Phi^p_{\frac{c}{s}}(a) = \int\limits_0^{2\Pi_T}\int\limits_0^{l}\left\{\Phi^p_{1k}(a,x,\psi_k)\,X_k(x)\begin{matrix}\mathrm{ca}\,(n+1,1,\psi_k)\\ \mathrm{sa}\,(1,n+1,\psi_k)\end{matrix}\right\}dxd\psi_k,$$

$$\gamma_c(a) = -\frac{8\omega_k ka}{n+2}\Pi_T\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\frac{n+1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\frac{\Pi+1}{\Pi+2}\right)},$$

$$\gamma_c(a) = -\frac{8\omega_k ka}{n+2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\frac{n+1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\frac{n+1}{n+2}\right)},$$

$$\beta_s(a) = \frac{4k}{n+2}\left(a\frac{d\omega_k}{da} - 2\omega_k\right)\Pi_T\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2\frac{n+1}{n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+2\frac{n+1}{n+2}\right)}.$$

Заметим, что при рассмотрении других видов линейных и нелинейных невозмущенных условий, задача решается аналогично с учетом изменения решения задачи для невозмущенного уравнения (1).

В частном случае из изложенного выше имеем решение задачи для автономного случая [6].

1. *Сеник П. М.* Обращение неполной Beta-функции.— Укр. мат. журн., 1969, **21**, № 3, с. 325—333.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.—503 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир, 1977.—622 с.
4. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища школа, 1976.—586 с.
5. *Филимонов А. М.* Периодические решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными.— Дифференц. уравнения, 1976, **12**, № 11, с. 2076—2084.
6. *Сокил Б. И., Барвинский А. Ф.* Об асимптотическом решении одной нелинейной краевой задачи.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 1, с. 22—26.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
16.03.1981 г.