УДК 519.46:519.53

В. В. Мухин

О топологизации полугрупп с инвариантной мерой

В работе [1] показано, что в группе с инвариантной мерой с помощью меры можно ввести топологию, тесно связанную с групповой операцией и мерой. Для реверсивных справа полугрупп с сокращениями аналогичные результаты получены в работах [2, 3].

Ниже рассмотрена конструкция введения топологии в полугруппе с инвариантной мерой (не обязательно счетно-аддитивной) с помощью меры. Ее можно рассматривать как распространение конструкции А. Вейля [1] на случай полугрупп. Некоторые результаты работы приведены в [4].

Пусть X — полугруппа, S — кольцо подмножеств полугруппы X и μ — аддитивная неотрицательная функция на S. Будем предполагать, что для любых $A \in S$ и $x \in X$ левый сдвиг $xA = \{xt \mid t \in A\}$ множества A принадлежит S и $\mu(xA) = \mu(A)$. Функцию μ, удовлетворяющую этому условию, называют левоинвариантной на X.

Пусть $A \in S$ и $\mu(A) < +\infty$. Положим $f_A(s, t) = \mu(sA \triangle tA)$, где $s, t \in X$.

Ясно, что отображение f_A произведения $X \times X$ в интервал $[0; +\infty)$ числовой прямой обладает следующими свойствами:

1. $f_A(s, s) = 0$ для любого s из X;
2. $f_A(s, t) = f_A(t, s)$ для любых s и t из X;
3. $f_A(s, t) \leqslant f_A(s, h) + f_A(h, t)$ для любых s, t, h из X, так как $sA\Delta tA \subset (sA\Delta hA) \cup (hA\Delta tA)$.

Иначе говоря, f_A — отклонение на X [5].

Пусть S_0 — непустое подмножество S, для каждого элемента которого справедливо неравенство $0 < \mu(A) < +\infty$. Семейство отклонений $(f_A)_{A\in S_0}$ определяет равномерную структуру на X. Топологию τ_W, порожденную этой равномерной структурой, будем называть вейлевской топологией. Известно [5], что множества $\{x \in X \mid \mu(xA_i \Delta yA_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots n\}$, где $A_i \in S_0$, $\varepsilon > 0$, образуют фундаментальную систему окрестностей точки $y \in X$ в топологическом пространстве (X, τ_W).

Теорема 1. *Если для любых $A \in S_0$ и $a \in X$ множество $aA \in S_0$, то отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $X \times X$ в X непрерывно в вейлевской топологии. Если, кроме того, X — инверсная полугруппа, то операция $x \mapsto x^{-1}$ взятия инверсного элемента непрерывна; в частности, если X — группа, то (X, τ_W) — топологическая группа.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Для любых A и B из S, для которых $\mu(A) < +\infty$ и $\mu(B) < +\infty$ и любого x из X справедливо равенство $\mu(A\Delta B) = \mu(xA\, \Delta\, xB)$.*

Доказательство. В силу левоинвариантности и аддитивности μ имеем

$$\mu(A\Delta B) = \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B); \tag{1}$$

$$\mu(xA\Delta xB) = \mu(xA \cup xB) - \mu(xA \cap xB); \tag{2}$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B); \tag{3}$$

$$\mu(xA \cup xB) = \mu(xA) + \mu(xB) - \mu(xA \cap xB) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(xA \cap xB). \tag{4}$$

Так как образ объединения равен объединению образов, то $x(A \cup B) = xA \cup xB$. Отсюда

$$\mu(A \cup B) = \mu(x(A \cup B)) = \mu(xA \cup xB). \tag{5}$$

Из (3) — (5) вытекает, что $\mu(A \cap B) = \mu(xA \cap xB)$. Отсюда и из (1), (2), (5) следует справедливость сформулированного в лемме утверждения.

Доказательство теоремы. Пусть $A_1, \dots, A_n \in S_0$, $x, y \in X$, $\varepsilon > 0$ и $W = \{t \in X \mid \mu(tA_i \triangle xyA_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, n\}$. Рассмотрим окрестности $U = \{s \in X \mid \mu(syA_i \triangle xyA_i) < \varepsilon/2,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ элемента x и $V = \{h \in X \mid \mu \times (hA_i \Delta yA_i) < \varepsilon/2,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ элемента y.

Пусть $s \in U$ и $h \in V$. Тогда для $i = 1, 2, \dots, n$ $\mu(shA_i \triangle xyA_i) \leqslant \mu(shA_i \triangle syA_i) + \mu(syA_i \triangle xyA_i)$. Из леммы вытекает, что правая часть последнего неравенства равна $\mu(hA_i \triangle yA_i) + \mu(syA_i \triangle xyA_i) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Следовательно, $sh \in W$. Тем самым мы показали, что отображение $(x, y) \mapsto xy$ произведения $X \times X$ в X непрерывно, т. е. (X, τ_W) — топологическая полугруппа.

Пусть X — инверсная полугруппа. Элемент, инверсный к элементу x, будем обозначать через x^{-1}. Если $\mu(A) < +\infty$, то с учетом леммы справедлива цепочка равенств

$$\mu(z(x^{-1}A)\triangle x(x^{-1}A))=\mu(x^{-1}zx^{-1}A\triangle x^{-1}xx^{-1}A)=\mu(x^{-1}zx^{-1}A\triangle x^{-1}A)=$$
$$=\mu(zx^{-1}A\triangle A)=\mu(zz^{-1}zx^{-1}A\triangle zz^{-1}A)=\mu(zx^{-1}A\triangle zz^{-1}A)=\mu(x^{-1}A\triangle z^{-1}A).$$

Следовательно, если $U=\{z\in X\mid \mu(zA_i\triangle x^{-1}A_i)<\varepsilon,\ i=1,2,\dots n\}$ — окрестность элемента x^{-1}, а $V=\{t\in X\mid \mu(t(x^{-1}A_i)\triangle x(x^{-1}A_i))<\varepsilon,\ i=1,2,\dots,n\}$ — окрестность элемента x, то для любого $t\in V$ элемент t^{-1} удовлетворяет соотношению $\mu(t^{-1}A_i\triangle x^{-1}A_i)<\varepsilon$, т. е. $t^{-1}\in U$. Значит, отображение $x\mapsto x^{-1}$ полугруппы X в себя непрерывно. Это и завершает доказательство теоремы.

Вообще говоря, топология τ_W не отделима. Но если функция μ и семейство S_0 удовлетворяют следующему условию: 1) для любых $x, y\in X$, $x\neq y$ существует $A\in S_0$ такое, что $\mu(xA\triangle yA)>0$, то $(f_A)_{A\in S_0}$ — разделяющее семейство отклонений и, следовательно, вейлевская топология отделима и вполне регулярна.

П р и м е р. Пусть G — группа, μ — левоинвариантная аддитивная функция, определенная на множестве всех подмножеств группы G, причем $\mu(G)=1$. Заметим, что такая функция μ существует, если G — аменабельная группа. Покажем, что μ и семейство $S_0=\{A\subset G\mid \mu(A)>0\}$ удовлетворяют условию 1). Для этого нам достаточно показать, что для любого $x\in G$, $x\neq e$, где e — нейтральный элемент группы G, существует $A\subset G$ такое, что $\mu(A)>0$ и $A\cap xA=\varnothing$.

В самом деле, если $x\neq e$, то $xe\neq e$. Поэтому множество $A=\{A\subset G\mid A\cap xA=\varnothing\}$ не пусто. Упорядочим его по включению. Пусть $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ — совершенно упорядоченная часть A. Рассмотрим множество $\tilde{A}=\bigcup\{A_\alpha|\alpha\in I\}$, и пусть $\tilde{A}\cap x\tilde{A}\neq\varnothing$. Тогда для некоторого $z\in A_{\alpha_1}$ также $z\in xA_{\alpha_2}$, где $\alpha_1,\alpha_2\in I$. Пусть $\alpha\in I$ такое, что $A_{\alpha_1}\subset A_\alpha$ и $A_{\alpha_2}\subset A_\alpha$. Тогда $z\in xA_\alpha$ и $z\in x\ A_\alpha$, т. е. $A_\alpha\cap xA_\alpha\neq\varnothing$. Полученное противоречие показывает, что $\tilde{A}\in A$. По лемме Цорна множество A обладает максимальным элементом A. Предположим, что $A\cup xA\cup x^{-1}A\neq G$.

Тогда существует элемент $z\in G$ такой, что $x\notin A$, $z\notin xA$ и $x\notin x^{-1}A$. В этом случае $(\{z\}\cup A)\cap x(\{z\}\cup A)=\varnothing$, а это противоречит максимальности A. Следовательно, $\mu(A)>0$. Таким образом, вейлевская топология в данном случае будет отделимой и согласованной с групповой структурой.

Если G — бесконечная группа, то представляет интерес решение вопроса о дискретности построенной топологии. Вероятно, она не дискретна.

Вернемся к полугруппам. Пусть S_0' — всюду плотное подмножество S_0, где топология в S_0 определяется квазиметрикой $\rho(A, B)=\mu(A\triangle B)$. Тогда семейства отклонений $(f_A)_{A\in S_0}$ и $(f_A)_{A\in S_0'}$ определяют одну и ту же равномерную структуру на X. В самом деле, если $A_i\in S_0$, $i=1, 2, \dots, n$, и $\varepsilon>0$, то в S_0' найдутся множества A_i' такие, что $\mu(A_i\triangle A_i')<\varepsilon/3$, $i=1, 2,\dots, n$. Тогда, если $\mu(xA_i'\triangle yA_i')<\varepsilon/3$, $i=1, 2, \dots, n$, то $\mu(xA_i\triangle yA_i)\leqslant\mu(xA_i\triangle xA_i')+\mu(xA_i'\triangle yA_i')+\mu(yA_i'\triangle yA_i)=\mu(A_i\triangle A_i'')+\mu(xA_i'\triangle yA_i')+\mu(A_i'\triangle A_i)<\varepsilon$.

Следовательно, множество $V=\{(x, y)\in X\times X\mid \mu(xA_i'\triangle yA_i')<\varepsilon/3,\ i=1, 2, \dots, n\}$ содержится в $U=\{(x, y)\in X\times X\mid \mu(xA_i\triangle yA_i)<\varepsilon,\ i=1, 2, \dots, n\}$. Отсюда и вытекает справедливость сформулированного выше утверждения.

Из сказанного выше и условия метризуемости равномеризуемых пространств [5] вытекает такая теорема.

Т е о р е м а 2. *Если семейство S_0 удовлетворяет условию 1) и содержит счетное всюду плотное подмножество, то (X, τ_W) — метризуемое топологическое пространство.*

Пусть (X, τ) — топологическая полугруппа, μ — ненулевая левоинвариантная мера, определенная на наименьшем σ-кольце, содержащем семейство $K(X)$ всех компактных подмножеств полугруппы X, и удовлетворяющая следующему условию: для любой точки x из X существует окрестность $U(x)$ точки x такая, что $\sup\{\mu(C) \mid C \in K(X),\ C \subset U(x)\} > +\infty$ (из этого условия вытекает, что каждое компактное подмножество X имеет конечную меру).

При этих предположениях справедлива лемма 1 из работы [3], из которой следует, что если $y \in X$, то множество $\{x \in X \mid \mu(xA_i \triangle yA_i) < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ открыто в (X, τ) для любой последовательности $A_1, \ldots, A_n$ компактных подмножеств полугруппы X.

Пусть S_0 — семейство всех компактных подмножеств из X положительной меры. Тогда вейлевская топология τ_W, построенная по этой системе S_0, будет слабее исходной топологии τ. Обозначим через ρ_a правый сдвиг $x \mapsto xa$ полугруппы X в себя.

Теорема 3. *Если носитель меры μ совпадает с полугруппой X и для любой точки y из X семейство*

$$\left(\bigcup_{t\in U} \rho_t^{-1}(yU)\right)_{U\in\tau}$$

образует фундаментальную систему окрестностей точки y, то вейлевская топология на X совпадает с исходной.

Доказательство. Пусть A — компактное подмножество X положительной меры и $0 < \varepsilon < 2\mu(A)$. Тогда для любого $y \in X$ справедливо включение

$$\bigcup_{t\in A} \rho_t^{-1}(yA) \supset \{x \in X \mid \mu(xA \triangle yA) < \varepsilon\}.$$

Действительно, из соотношения $\mu(xA \triangle yA) < \varepsilon$ вытекает, что пересечение $xA \cap yA$ не пусто. Следовательно, существуют такие t и h из A, что $xt = yh$. Отсюда $x \in \rho_t^{-1}(yh)$. Значит, $x \in \rho_t^{-1}(yA)$.

Пусть V — окрестность точки y в топологии τ. Из предположений теоремы вытекает существование множества $U \in \tau$ такого, что $\bigcup_{t\in U} \rho_t^{-1}(yU) \subset V$.

Множество U содержит компактное подмножество A положительной меры, в противном случае носитель меры μ не совпадал бы с X. Для $0 < \varepsilon < 2\mu(A)$ имеем

$$V \supset \bigcup_{t\in U} \rho_t^{-1}(yU) \supset \bigcup_{t\in A} \rho_t^{-1}(yA) \supset \{x \in X \mid \mu(xA \triangle yA) < \varepsilon\}.$$

Это и доказывает теорему.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 3, то топология τ в полугруппе X вполне регулярна; если, кроме того, X — инверсная полугруппа, то операция взятия инверсного элемента непрерывна.*

1. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1950 — 222 с.
2. *Мухин В. В., Миротин А. Р.* Вейлевская топология в полугруппах с инвариантной мерой.— В кн. VII Всесоюз. топол. конф. Минск: Ин-т математики АН БССР, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1977, с. 132.
3. *Мухин В. В.* Инвариантные меры на полугруппах и вложение топологических полугрупп в топологические группы.— Мат. сб., 1980, 112, № 2, с. 295—303.
4. *Мухин В. В.* Равномерные структуры в полугруппах, порождаемые инвариантной мерой.— В кн.: V Респ. конф. математиков Белоруссии. Гродно: Гродней. ун-т, 1980, т. 1, с. 18—19.
5. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. М.: Наука, 1975.— 408 с.

Гомельский
государственный университет

Поступила в редакцию
14.07.81