УДК 519.41/47

Н. С. Черников

О простых локально-конечных группах с условием минимальности для 2-подгрупп

О. Кегель в «Коуровской тетради» поставил следующий вопрос (5.19 а). Пусть G — бесконечная простая локально-конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для 2-подгрупп. Будет ли G изоморфна $PSL(2,F)$ для некоторого локально-конечного поля F нечетной характеристики, если централизатор в ней любой ее инволюции почти локально-разрешим?

В настоящей работе получено положительное решение этого вопроса.

Напомним, что инволюцией называется элемент порядка 2 группы; почти локально-разрешимой группой называется конечное расширение локально-разрешимой группы; через $O(X)$ обозначается максимальная нормальная подгруппа периодической группы X, не содержащая отличных от единицы 2-подгрупп.

Ввиду [1] достаточно показать, что в централизаторе в G произвольной ее инволюции i p-подгруппы при любом простом p черниковские (т. е. являются конечными расширениями абелевых подгрупп с условием минимальности). Так как группа $C_G(i)$ локально-конечна, почти локально-разрешима и удовлетворяет условию минимальности для 2-подгрупп, то ввиду теоремы 3.17 из [2] $C_G(i)/O(C_G(i))$ — почти 2-группа. Поэтому, очевидно, достаточно показать, что в подгруппе $O(C_G(i))$ p-подгруппы при каждом простом p черниковские. Для этого же, очевидно, достаточно показать, что в группе $O(C_G(i))$ любая конечная подгруппа H циклическая. Последнее и доказывается ниже. Будем предполагать, что подгруппа H отлична от единицы (иначе доказывать нечего).

Так как группа G бесконечна, локально-конечна и проста, то каждая ее конечная подгруппа содержится в некоторой ее (бесконечной) счетной простой подгруппе (см. [2], теорема 4.4). Пусть A — счетная простая подгруппа группы G, содержащая H и i. В соответствии с леммой 4.5 из [2] группа A представима в виде объединения такой цепочки конечных подгрупп $B_1 \subset B_2 \subset \ldots B_k \subset \ldots$, что при каждом $k = 2, 3, \ldots$ некоторая максимальная нормальная подгруппа C_k группы B_k имеет единичное пересечение с B_{k-1}.

Покажем, что при достаточно большом k порядок подгруппы C_k нечетен. Ввиду теоремы 3.7 и следствия 3.11 из [2] группа $\langle C_2, C_3, \ldots\rangle$ обладает некоторой 2-подгруппой P, удовлетворяющей следующему условию (*): каждая конечная 2-подгруппа группы $\langle C_2, C_3, \ldots\rangle$ покрывается некоторой подгруппой, сопряженной в ней с P. Так как пересечение $\bigcap_{k=2}^{\infty} \langle C_k, C_{k+1}, \ldots\rangle$, очевидно, единичное и подгруппа P удовлетворяет условию минимальности, то при достаточно большом k пересечение $P \cap \langle C_k, C_{k+1}, \ldots\rangle$ единичное. Пользуясь этим, учитывая свойство (*) и то, что подгруппа $\langle C_k, C_{k+1}, \ldots\rangle$ нормальна в группе $\langle C_2, C_3, \ldots\rangle$, нетрудно убедиться, что при достаточно большом k подгруппа $\langle C_k, C_{k+1}, \ldots\rangle$ не содержит отличных от единицы 2-подгрупп. Вместе с этим порядок подгруппы C_k нечетен.

Будем считать теперь индекс k настолько большим, что, во-первых, подгруппа B_k содержит H и i и, во-вторых, порядок подгруппы C_{k+1} нечетен. Подгруппа H, будучи подгруппой группы $O(C_G(i))$, очевидно, содержится в $O(C_{B_{k+1}}(i))$. Следовательно, ввиду тривиальности пересечения $B_k \cap C_{k+1}$ и включения $H \subset B_k$ подгруппа H изоморфно вкладывается в фактор-группу $O(C_{B_{k+1}}(i))\, C_{k+1}/C_{k+1}$. Рассмотрим (простую) фактор-группу B_{k+1}/C_{k+1}. Образ в ней произвольного подмножества X из B_{k+1} будем обозначать через $\overline{X}$. Пользуясь тем, что порядок подгруппы C_{k+1} нечетен, нетрудно убедиться, что выполняется соотношение $C_{\overline{B_{k+1}}}(\bar{i}) = \overline{C_{B_{k+1}}(i)}$. Тогда подгруппа $\overline{O(C_{B_{k+1}}(i))}$, очевидно, содержится в группе $O(C_{\overline{B_{k+1}}}(\bar{i}))$. Следовательно, группа H изоморфно вкладывается в последнюю. Таким образом, подгруппа $O(C_{\overline{B_{k+1}}}(\bar{i}))$ отлична от единицы и, значит, ввиду [3] группа $\overline{B_{k+1}}$ изоморфна одной из известных к настоящему времени конечных простых групп. Поэтому в силу предложения 4. 2. 1 из [4] подгруппа $O(C_{\overline{B_{k+1}}}(\bar{i}))$ циклическая. Тогда группа H является циклической, что и требовалось доказать. Вместе с этим группа G изоморфна $PSL(2, F)$ для некоторого локально-конечного поля F нечетной характеристики.

1. *Беляев В. В.* Локально-конечные группы с черниковскими силовскими p-подгруппами.— Алгебра и логика, 1981, **20**, № 6, с. 605—619.
2. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam; London: North-Holland Publ. Comp., 1973.— 210 p.
3. *Walter J. H.* The B-conjecture: 2-components in finite simple groups.— In: Santa Cruz conf. finite groups. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1980, p. 57—66.
4. *Gorenstein D.* The classification of finite simple groups. I. Simple groups and local analysis.— Bull. Amer. Math. Soc. New ser., 1979, **1**, N 1, p. 43—199.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
23.12.80