УДК 513.88+517.9

И.-П. П. Сыроид

Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра с условиями гладкости типа Като

В заметке относительная гладкость операторов в смысле Като [2], [10] применяется при определении и исследовании преобразования Фурье несамосопряженных возмущений самосопряженных операторов.

1. Определения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — гильбертовы пространства. В качестве невозмущенного оператора возьмем плотно определенный самосопряженный оператор M_1 в $\mathfrak{H}$. В силу самосопряженности оператора M_1 существует неотрицательная мера $\delta \to s(\delta)$ на вещественной оси и такое унитарное отображение U пространства $\mathfrak{H}$ в интеграл $\mathfrak{H}_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}(\lambda)\, ds(\lambda)$ гильбертовых пространств $\mathfrak{H}(\lambda)$, что оператор M_1 подобен оператору S умножения на независимую переменную в $\mathfrak{H}_0$. Оператор U называется M_1-преобразованием Фурье: $UM_1 = SU$.

Определение 1. (гладкость типа Като). *Пусть существуют несамосопряженные, замкнутые, плотно определенные операторы A и B из $\mathfrak{H}$ в $\widetilde{\mathfrak{H}}$, являющиеся M_1-гладкими по мере s, диагонализирующей оператор M_1 и при этом $A \not\equiv 0$, $B \not\equiv 0$. Т. е. предполагается принадлежность функций $\zeta \to AR_1(\zeta) f, \zeta \to BR_1(\zeta) f$ к классам Харди $H^2(\Omega_\pm, \widetilde{\mathfrak{H}}, ds)$ (здесь и далее $R_1(\zeta)$ — резольвента оператора M_1):*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| AR_1(\lambda \pm i\varepsilon) f \|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\, ds(\lambda) \leqslant C \| f \|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| BR_1(\lambda \pm i\varepsilon) f \|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\, ds(\lambda) \leqslant \widetilde{C} \| f \|^2_{\mathfrak{H}}, \tag{1}$$

где $C < \infty$, $\widetilde{C} < \infty$ не зависят от $\varepsilon > 0$.

В силу свойств функций из классов Харди существуют пределы $AR_1(\zeta) f \to AR_1(\lambda \pm i0) f$ $(BR_1(\zeta) f \to BR_1(\lambda \pm i0) f)$ в смысле сильной сходимости в $L_2(-\infty, \infty; \widetilde{\mathfrak{H}}; ds)$ для всех вещественных λ, за исключением множества s-меры нуль. При этом ζ приближается к λ с верхней Ω_+ (нижней Ω_-) полуплоскости по некасательному пути.

Определение 2. *Пусть $m(\delta)$ — произвольная мера, сохраняющая принадлежность к $H^2(\Omega_\pm; \widetilde{\mathfrak{H}}; dm)$ функций $\zeta \to AR_1(\zeta) f$ и $\zeta \to BR_1(\zeta) f$. Если $dm(\lambda) = d\lambda$, то реализуется относительная гладкость Като* [2].

Определение 3 (локальная гладкость типа Като). *Пусть Δ — s-измеримое множество вещественной прямой и*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| AR_1(\lambda \pm i\varepsilon) P_1(\Delta) f \|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\, ds(\lambda) \leqslant C_\Delta \| f \|^2_{\mathfrak{H}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| BR_1(\lambda \pm i\varepsilon) P_1(\Delta) f \|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\, ds(\lambda) \leqslant \widetilde{C}_\Delta \| f \|^2_{\mathfrak{H}}, \tag{2}$$

где $P_1(\Delta)$ — значение спектральной меры невозмущенного оператора M_1 на множестве Δ (сравни (2) с (1)). Тогда при $C_\Delta < \infty$, $\widetilde{C}_\Delta < \infty$ возмущение $V = B^*A$ назовем локально гладким на Δ относительно оператора M_1. См. [9] и автор [6].

В дальнейшем будем использовать только определение 1, хотя в доказываемых теоремах можно использовать определения 2 и 3.

Условие $\mathcal{A}$. Пусть $R_1(\zeta)$ — резольвента оператора M_1, а $[K]$ обозначает замыкание оператора K. Предположим, что 1) оператор $Q(\zeta) = A[R_1(\zeta)B^*]: \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ вполне непрерывен и имеет продолжения $Q(\zeta)_+$ ($Q(\zeta)_-$) с верхней (нижней) полуплоскости на непрерывный спектр с сохранением полной непрерывности в $\widehat{\mathfrak{H}}$; 2) $\| Q(\zeta)^2_\pm \| \xrightarrow[|\mathrm{Im}\,\zeta| \to \infty]{} 0$, $\| Q^*(\zeta)^2_\pm \| \xrightarrow[|\mathrm{Im}\,\zeta| \to \infty]{} 0$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \geqslant 0$ для операторов со знаком «$+$» и в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta \leqslant 0$ для операторов со знаком «$-$».

Определение 4. *Пусть* $K(\zeta) = 1 + Q(\zeta)$, $K(\zeta)_\pm = 1 + Q(\zeta)_\pm$, $K^*(\zeta) = 1 + Q^*(\zeta)$, $K^*(\zeta)_\pm = 1 + Q^*(\zeta)_\pm$ *и обозначим через* $\Sigma(\Sigma^*)$ *множество тех точек* $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$, *в которых оператор* $K(\zeta)$ ($K^*(\zeta)$) *необратим.*

Предложение 1. *Множество* Σ *не более чем счетно, состоит из изолированных точек с возможными точками накопления на вещественной оси. Каждая точка* $\lambda \in \Sigma$ — *полюс функции* $\zeta \to K(\zeta)^{-1}$.

Определим оператор $M \supset M_1 + B^*A$, следуя Като [2].

Пусть $\zeta \in \Omega \setminus \Sigma$ ($\Omega = \{\zeta : \mathrm{Im}\,\zeta \neq 0\}$). Определим оператор $R(\zeta)$:

$$R(\zeta) = R_1(\zeta) - [R_1(\zeta)B^*]K(\zeta)^{-1}AR_1(\zeta). \tag{3}$$

Оператор $R(\zeta)$ ограничен в $\mathfrak{H}$ при $\zeta \in \Omega \setminus \Sigma$. Имеют место тождества

$$\begin{gathered} AR(\zeta) = K(\zeta)^{-1}AR_1(\zeta), \quad BR(\zeta)^* = K^*(\zeta)^{-1}BR_1(\zeta), \\ R(\zeta) - R_1(\zeta) = -[R(\zeta)B^*]AR_1(\zeta) = -[R_1(\zeta)B^*]AR(\zeta). \end{gathered} \tag{4}$$

Предложение 2. *Пусть* $\zeta \in \Omega \setminus \Sigma$. *Тогда*: 1) *множество нулей оператора* $R(\zeta)$ *состоит лишь из нулевого вектора, область значений оператора* $R(\zeta)$ *плотна в* $\mathfrak{H}$; 2) $R(\zeta)$ *удовлетворяет резольвентному уравнению Гильберта.*

Доказательство см. в [2].

Следствие 1. *Существует единственный замкнутый оператор* M, *плотно определенный в* $\mathfrak{H}$ *и имеющий* $R(\zeta)$ *своей резольвентой. Множество* $\Omega \setminus \Sigma$ *принадлежит резольвентному множеству оператора* M ($\Omega = \{\zeta : \mathrm{Im}\,\zeta \neq 0\}$). *Оператор* M *является расширением оператора* $M_1 + B^*A : M \supset M_1 + B^*A$ (см. [2]).

Определение 5. *s-измеримое множество* Δ *вещественной оси назовем M-неособенным множеством, если* Δ *принадлежит общей части спектров операторов* M_1, M *и*

$$\operatorname*{ess\text{—}sup}_{\lambda \in \Delta} \| K(\lambda)^{-1}_\pm \| = C^\pm_\Delta < \infty, \quad \operatorname*{ess\text{—}sup}_{\lambda \in \Delta} \| K^*(\lambda)^{-1}_\mp \| = C^{*\pm}_\Delta < \infty. \tag{5}$$

Замечание 1. Замыкание всякого M-неособенного множества не содержит спектральных особенностей оператора M [3], [4], [11].

2. M^*- и M-преобразования Фурье непрерывного спектра.

Свойства непрерывности. Локальное равенство Парсеваля. Пусть [1] $\mathfrak{H}_+ \subset \mathfrak{H} \subset \mathfrak{H}_-$ — оснащение Гильберта—Шмидта пространства $\mathfrak{H}$, в котором действует оператор M_1 и оператор M_1 допускает продолжение оснащения. Тогда можно найти систему ортогональных в смысле $\mathfrak{H}_-$ обобщенных собственных векторов оператора M_1 $\{s_k(\lambda)\}$, $s_k \in \mathfrak{H}_-$, $k = 1, \ldots, N_\lambda = \dim \mathfrak{H}(\lambda)$ $\sum_{k=1}^{N_\lambda} \| s_k(\lambda) \|^2_{\mathfrak{H}_-} = 1$ таких, для которых M_1-преобразование Фурье на векторах из $\mathfrak{H}_+$ определяется так: $Ug(\lambda) = ((g, s_1(\lambda))_{\mathfrak{H}_-}, (g, s_2(\lambda))_{\mathfrak{H}_-}, \ldots)$ $g \in \mathfrak{H}_+$.

Пусть $\sigma = \{\Delta\}$ — совокупность M-неособенных множеств (см. определение 5) вещественной оси. Определим для s-почти всех λ из $\Delta \in \sigma$

$$AR(\lambda \pm i0) = K(\lambda)^{-1}_\pm AR_1(\lambda \pm i0), \quad BR(\lambda \mp i0)^* = K^*(\lambda)^{-1}_\mp BR_1(\lambda \pm i0)^*. \tag{6}$$

Определение 6. *Пусть операторы A, B продолжены до операторов из $\mathfrak{H}_-$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ (см., например, [1]). Определим для s-почти всех λ из $\Delta \in \sigma$*

$$\Phi_\pm f(\lambda) = Uf(\lambda) - ((BR(\lambda \mp i0)^* f, As_1(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}} \ (BR(\lambda \mp i0)^* f, As_2(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}}, \ldots), \quad f \in \mathfrak{H},$$

$$\Psi_\pm f(\lambda) = Uf(\lambda) - ((AR(\lambda \pm i0) f, Bs_1(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}} \ (AR(\lambda \pm i0) f, Bs_2(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}}, \ldots), \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Назовем операторы $\Phi_\pm$ и $\Psi_\pm$ соответственно M^*- и M-преобразованием Фурье непрерывного спектра.

Пусть Δ — s-измеримое подмножество вещественной оси. Обозначим $\mathfrak{H}_0(\Delta) = \chi_\Delta(S)\mathfrak{H}_0$, где $\chi_\Delta(S)$ — оператор умножения в $\mathfrak{H}_0$ на характеристическую функцию множества Δ.

В следующей лемме исследуются свойства непрерывности M^*- и M- преобразования Фурье.

Лемма 1. *Пусть $\Delta \in \sigma$ — M-неособенное множество (см. определение 5) и*

$$\sum_{k=1}^{N_\lambda} \| As_k(\lambda) \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_A^2 < \infty, \quad \sum_{k=1}^{N_\lambda} \| Bs_k(\lambda) \|^2_{\widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_B^2 < \infty, \tag{7}$$

где C_A, C_B не зависят от λ. Тогда

$$\| \Phi_\pm f \|_{\mathfrak{H}_0(\Delta)} \leqslant C_\Delta \| f \|_{\mathfrak{H}}, \quad C_\Delta < \infty, \tag{8}$$

$$\| \Psi_\pm f \|_{\mathfrak{H}_0(\Delta)} \leqslant C'_\Delta \| f \|_{\mathfrak{H}}, \quad C'_\Delta < \infty, \tag{9}$$

т. е. операторы $\chi_\Delta(S)\Phi_\pm$, $\chi_\Delta(S)\Psi_\pm$: $\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_0(\Delta)$ ограничены при $\Delta \in \sigma$.

Замечание 2. Условие (7) содержится в заметке [6] и предполагает неограниченность операторов A, B в $\mathfrak{H}$.

При доказательстве (8) и (9) используются формулы (6), (5) и (1).

Следующая лемма обосновывает определения M^*- и M-преобразования Фурье.

Лемма 2. *Пусть $\Delta \in \sigma$, а ζ принадлежит резольвентному множеству оператора M. Тогда*

$$\chi_\Delta(S)\Psi_\pm R(\zeta) f = (S-\zeta)^{-1}\chi_\Delta(S)\Psi_\pm f, \ \ \chi_\Delta(S)\Phi_\pm R^*(\zeta) f = (S-\zeta)^{-1}\chi_\Delta(S)\Phi_\pm f,$$

$$R^*(\zeta) = R(\bar{\zeta})^*, \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Пусть $P_1(\delta) = U^*\chi_\delta(S)U$ — спектральная мера оператора M_1. В теореме 6 доказано равенство Парсеваля, локализованное на M_1-неособенном множестве Δ.

Теорема 1. *Пусть возмущение $V = B^*A$ гладко относительно невозмущенного оператора M_1 и удовлетворяет условиям $\mathcal{A}$ и (7), а Δ—M-неособенное множество: $\Delta \in \sigma$. Тогда для всякого $g \in \mathfrak{H}_0(\Delta)$ существует такое $h \in \mathfrak{H}$, что $\chi_\Delta(S)\Psi_\pm h = g$. При этом $h = (\chi_\Delta(S)\Phi_\pm)^* g$, т. е.*

$$\chi_\Delta(S)\Psi_\pm(\chi_\Delta(S)\Phi_\pm)^* = \chi_\Delta(S). \tag{10}$$

Доказательство. $(x_\Delta(S)\Phi_\pm)^* g = U^*\chi_\Delta(S) g - \int\limits_\Delta (BR(\mu \mp i0)^*)^* \times$ $\times \sum\limits_{k=1}^{N_\mu} g_k(\mu) As_k(\mu)\, ds(\mu)$. Получается $\chi_\Delta(S)\Psi_\pm(\chi_\Delta(S)\Phi_\pm)^* g = \chi_\Delta(S) g + I_1 + I_2 + I_3$, где $I_1 = -(\ldots, \chi_\Delta(\lambda)(AR(\lambda \pm i0)U^*\chi_\Delta(S) g, Bs_j(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}}, \ldots)$, $I_2 = -\chi_\Delta(S) U \int\limits_\Delta (BR(\mu \mp i0)^*)^* \sum\limits_{k=1}^{N_\mu} g_k(\mu) As_k(\mu)\, ds(\mu)$, $I_3 = \left(\ldots, \chi_\Delta(\lambda)\left(AR(\lambda \pm i0) \int\limits_\Delta (BR(\mu \mp i0)^*)^* \sum\limits_{k=1}^{N_\mu} g_k(\mu) As_k(\mu)\, ds(\mu), Bs_j(\lambda)\right)_{\widehat{\mathfrak{H}}}, \ldots\right)$.

Используя равенства

$$AR(\lambda \pm i0)(BR(\mu \mp i0)^*)^* h = 1/(\lambda - \mu \pm i0)(A[R(\lambda \pm i0)B^*] - A[R(\mu \mp i0)B^*])h, \tag{11}$$

$$-A[R(\lambda \pm i0)B^*]AR_1(\lambda \pm i0) = AR(\lambda \pm i0) - AR_1(\lambda \pm i0), \tag{12}$$

получающиеся предельным переходом с помощью резольвентного тождества Гильберта (для (11)) и (4) (для (12)), находим $I_3 = -I_1 - I_2$, что доказывает (10) и теорему 6.

Определим оператор $P(\Delta) = (\chi_\Delta(S)\Phi_\pm)^* x_\Delta(S)\Psi_\pm$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оператор $P(\Delta): \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ идемпотентен $P(\Delta)^2 = P(\Delta)$ и*

$$MP(\Delta) = P(\Delta) M, \tag{13}$$

т. е. подпространство $P(\Delta)\mathfrak{H}$ приводит оператор M.

Доказательство. Свойство идемпотентности оператора $P(\Delta)$ следует из теоремы 1, а (13) вытекает из леммы 5.

3. Подобие операторов $MP(\Delta)$ и $M_1P_1(\Delta)$. Волновые операторы. Определение 7. *Операторы $W_\pm(\Delta)$ и $Z_\pm(\Delta)$ определим следующим образом:*

$$W_\pm(\Delta) = (\chi_\Delta(S)\Phi_\pm)^* \chi_\Delta(S) U, \quad Z_\pm(\Delta) = U^*\chi_\Delta(S)\Psi_\pm. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 6. Тогда:* 1) *операторы $MP(\Delta)$ и $M_1P_1(\Delta)$ подобны:*

$$MP(\Delta) = W_\pm(\Delta) M_1 P_1(\Delta) Z_\pm(\Delta), \tag{15}$$

при этом

$$Z_\pm(\Delta) W_\pm(\Delta) = P_1(\Delta), \quad W_\pm(\Delta) Z_\pm(\Delta) = P(\Delta); \tag{16}$$

2) *операторы $W_\pm(\Delta)$ и $Z_\pm(\Delta)$ представимы в виде*

$$(W_\pm(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} = (P_1(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta ((AR_1(\lambda + i0) - AR_1(\lambda - i0)) f,$$
$$BR(\lambda \mp i0)^* g)_{\widehat{\mathfrak{H}}}\, ds(\lambda), \tag{17}$$

$$(Z_\pm(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} = (P_1(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta (AR(\lambda \pm i0) f,$$
$$(BR_1(\lambda + i0)^* - BR_1(\lambda - i0)^*) g)_{\widehat{\mathfrak{H}}}\, ds(\lambda). \tag{18}$$

Для сравнения см. [2], [7], [10]. Без доказательства теорема сформулирована в [6], с меньшей общностью — в [12].

Доказательство. Докажем (18). Представление (17) для $W_\pm(\Delta)$ доказывается подобно. Из определения (14) получаем

$$(Z_\pm(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} = (U^*\chi_\Delta(S)\Psi_\pm f, g)_{\mathfrak{H}} = (U^*\chi_\Delta(S) U f, g)_{\mathfrak{H}} -$$
$$- \int_\Delta \sum_{k=1}^{N_\lambda} (AR(\lambda \pm i0) f, Bs_k(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}} \overline{(Ug)_k}(\lambda)\, ds(\lambda) =$$
$$= (P_1(\Delta) f, g)_{\mathfrak{H}} - \int_\Delta (AR(\lambda \pm i0) f, \quad \sum_{k=1}^{N_\lambda} (Ug)_k(\lambda) Bs_k(\lambda))_{\widehat{\mathfrak{H}}} ds(\lambda). \tag{19}$$

На векторах из $\mathfrak{H}_+$ имеет место формула для скачка резольвенты невозмущенного оператора: $\sum_{k=1}^{N_\lambda} (Uf)_k(\lambda) s_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}(R_1(\lambda + i0) - R_1(\lambda - i0)) f(x) = -\frac{1}{2\pi i}(R_1(\lambda + i0)^* - R_1(\lambda - i0)^*) f(x), \quad f \in \mathfrak{H}_+$. Поэтому $\sum_{k=1}^{N_\lambda} (Ug)_k(\lambda) \times$

$\times Bs_k(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}(BR_1(\lambda + i0)^* - BR_1(\lambda - i0)^*)\,g$, где уже $g \in \mathfrak{H}$. Подставляя это выражение в (19), получаем (18).

Подобие (15) имеет место в силу транзитивности отношения подобия (каждый из операторов $M_1P_1(\Delta)$ и $MP(\Delta)$ подобен оператору $S\chi_\Delta(S)$). Равенства (16) получаются с применением теоремы 1 и следствия 2. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Используя представление (17), можно доказать, что операторы $W_\pm(\Delta)$ волновые, именно:

$$W_\pm(\Delta) = \underset{t\to\pm\infty}{\text{s—lim}} \exp\{itMP(\Delta)\}\,P(\Delta)\exp\{-itM_1P_1(\Delta)\},$$

где $\exp\{itMP(\Delta)\}$ и $\exp\{-itM_1P_1(\Delta)\}$ — сильно непрерывные группы класса (C), для которых $iMP(\Delta)$ и $iM_1P_1(\Delta)$ — производящие операторы.

П р и м е р ы. 1. Пусть $x \to v_i(x)$ — комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbf{R}} |v_i(x)|\,dx < \infty, \quad i = 1, 2. \tag{20}$$

Обозначим через V оператор умножения на матрицу $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(\mathbf{R}) \times L_2(\mathbf{R})$.

За невозмущенный оператор возьмем оператор Дирака M_1, порождаемый в $\mathfrak{H}$ дифференциальным выражением $\mathfrak{L}\frac{d}{dx}$, $\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и областью определения $D(M) = W_2^1(\mathbf{R}) \times W_2^1(\mathbf{R})$.

Т е о р е м а 3. *Если оператор Дирака $M \supset M_1 + V$ не имеет спектральных особенностей на непрерывном спектре, т. е. $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ — M-неособенное множество и множество собственных значений оператора M конечно, то оператор M при условии* (20) *спектрален в смысле Данфорда—Бэйда* [8] (см. также [5]).

В д о к а з а т е л ь с т в е используется гладкость в смысле определения 1.

2. Пусть оператор M_1 порождается в $L_2[0, \infty)$ дифференциальным выражением $l(f) = -f''$ и областью определения $D(M_1) = \{f'$ абсолютно непрерывна в каждом промежутке $[0, a]$, $a > 0$; f, $l(f) \in L_2[0, \infty)$ и $f(0) = 0\}$. V — оператор умножения на комплекснозначную функцию $x \to v(x)$ в $L_2[0, \infty)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^\infty x\,|v(x)|\,dx < \infty. \tag{21}$$

Т е о р е м а 4. *Если оператор $M \supset M_1 + V$ не имеет спектральных особенностей, т. е. $[0, \infty)$ — M-неособенное множество, то при условии* (21) *оператор Шредингера M спектральный в смысле Данфорда — Бэйда.*

Относительная гладкость возмущения доказана в [2] (определение 2).

3. Пусть оператор M_1 порождается в $L_2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением $l_1(y) = (-1)^n\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}$ и областью определения $D(M_1) = \{y^{(2n-1)}$ абсолютно непрерывна в каждом промежутке $[a, b] \subset \mathbf{R}$ и $y, l_1(y) \in L_2(-\infty, \infty)\}$.

Т е о р е м а 5. *Пусть V—оператор умножения на комплекснозначную функцию $x \to v(x)$ в $L_2(-\infty, \infty)$, удовлетворяющую условию $\int_{-\infty}^{\infty} |v(x)|\,dx < \infty$. Тогда для оператора $M \supset M_1 + V$ и всякого M-неособенного множества Δ имеет место теорема 2.*

Относительная гладкость возмущения в локальном смысле (определение 3) в самосопряженном случае доказана в [9].

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. *Като Т.* Волновые операторы и подобие для некоторых несамосопряженных операторов.— Математика, 1974, 18, № 3, с. 60—82.
3. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси.— Труды Московск. матем. о-ва, 1954, 3, с. 181—270.
4. *Лянце В. Э.* Вполне регулярное возмущение непрерывного спектра I.— Мат. сб., 1970, 82, с. 126—156; II, Матем. сб. 1971, 84, с. 141—158.
5. *Сыроид И. П.* Задача о несамосопряженном возмущении непрерывного спектра для оператора Дирака.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 2, с. 122—126.
6. *Сыроид И. П.* Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра с условиями гладкости и почти-гладкости.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений.— Киев : Ин-т матем. АН УССР, 1976, с. 115—116.
7. *Mochizuki K.* Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operator with a complex potential and the Scattering theory.— Publ. RIMS Kioto Univ. Ser. A, 1968, 4, p. 419—466.
8. *Данфорд Н.* Обзор по теории спектральных операторов. — Математика, 1960, 4, № 1, с. 53—100.
9. *Butler J. B.* Almost smooth Perturbations of Selfadjoint Operators, Pacific Journ. of Math., 1970, 35, N 2, p. 297—306.
10. *Kato T.* Smooth Operators and Commutators.— Studia Math. 1968, 31, N 5, p. 535—546.
11. *Schwartz J.* Some non-selfadjoint Operators.— Comm. Pure Appl. Math. 1960, 13, p. 609—639.
12. *Kato T., Yajima K.* Scien. papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokio, 1976, 26, N 12, p. 73—89.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
25.03.80