УДК 517.911

Й. Диблик

Асимптотическое поведение решений одной системы дифференциальных уравнений вблизи особой точки

В данной статье исследуется система дифференциальных уравнений вида

$$g_i(x)\,y_i' = \alpha_i(y_i)\,[1 + f_i(x, y_1, \ldots, y_n)],\ \ i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

и начальная задача

$$y_i(+0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Получены достаточные условия, при которых задача (1), (2) имеет нетривиальные решения. Скалярные уравнения аналогичного вида изучались, например, в работах [1—4]. Приведем вспомогательную лемму.

Лемма (о неявных функциях). *Пусть в области* $D\ [0 < x < x_0,\ 0 < y < y_0]$, $0 < x_0,\ y_0 = \mathrm{const}$ *функция* $\omega(x, y)$ *удовлетворяет условиям:* *а)* $\omega(x, y) \in C^{(1)}_{(x,y)}$; *в)* $\omega(+0, +0) = 0$; *с)* $\omega_y'(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,\omega_x'(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 0$, *где* $0 < \varepsilon_i < \varepsilon^0$, $\varepsilon_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$, $\varepsilon^0 = \mathrm{const}$, ε^0 *достаточно мало.*

Тогда уравнение $\omega(x, y) = 0$ *при* $0 < x \leqslant x_{00} < x_0$, *где* $0 < x_{00} = \mathrm{const}$, x_{00} *достаточно мало, будет определять* y *как единственную функцию* $y = y(x) \in C^{(1)}(0, x_{00})$ *и кроме того* $y(+0) = 0$, $y(x) \in D$.

Доказательство. Для определенности положим $\omega_y'(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, $\omega_x'(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 0$. Значения функции $\omega(x, y)$ в точках, находящихся вблизи оси y в области D, будут положительны и значения функции $\omega(x, y)$ в точках, находящихся вблизи оси x в области D, будут отрицательны. Соединяя прямой любые две точки, в которых $\omega(x, y)$ принимает значения различных знаков, заключаем, что на каждой из этих прямых находится единственный корень функции $\omega(x, y)$. Дальше поступаем по схеме доказательства теоремы о неявных функциях, содержащейся, например, в [5].

Теорема 1. *Пусть*

1) $g_i(x) > 0$ *при* $x \in (0, x_0)$, $g_i(x) \in C^{(0)}(0, x_0]$, $= \overline{1, n}$;

2) $\alpha_i(y_i) > 0$ *при* $y_i \in (0, y_0)$, $\alpha_i(y_i) \in C^{(0)}(0, {}_0]$, $j = \overline{1, n}$;

3) $\lim\limits_{x\to+0} \int\limits_{+0}^{x} \dfrac{dt}{g_i(t)} = \lim\limits_{x\to+0} \int\limits_{+0}^{x} \dfrac{dt}{\alpha_i(t)} = 0$, $i = \overline{1, m}$, $0 \leqslant m \leqslant n$;

4) $\lim\limits_{x\to+0} \int\limits_{x_0}^{x} \dfrac{dt}{g_i(t)} = \lim\limits_{x\to+0} \int\limits_{y_0}^{x} \dfrac{dt}{\alpha_i(t)} = -\infty$, $i = \overline{m+1, n}$;

5) $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \delta_i < 1$, $0 < \delta_i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1, n}$ *в области* $D_0 =$

$\{(x, \bar{y})\colon 0 < x < x_0,\ 0 < y_i < y_0,\ i = \overline{1, n}\}$;

6) *решения системы* (1) *в* D_0 *определяются однозначно начальными данными из* D_0 *и непрерывно зависят от начальных данных.*

Тогда задача (1), (2) *будет иметь по крайней мере* $(n - m)$ *параметрических семейств решений* $\bar{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, *находящихся при* $x \to +0$ *в области* D_0 *и, более того, удовлетворяющих неравенствам*

$$\left| \int\limits_{+0}^{y_i(x)} \frac{dt}{\alpha_i(t)} \int\limits_{+0}^{x} \frac{dt}{g_i(t)} \right| < \delta^i \int\limits_{+0}^{x} \frac{dt}{g_i(t)}, \tag{3_1}$$

где $\delta_i < \delta^i < 1$, $\delta^i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1, m}$, *и*

$$\left| \int\limits_{y_0}^{y_i(x)} \frac{dt}{\alpha_i(t)} - \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{g_i(t)} \right| < \delta^i \left| \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{g_i(t)} \right|, \tag{3_2}$$

где $\delta_i < \delta^i < 1$, $\delta' = \mathrm{const}$, $i = \overline{m+1, n}$.

Доказательство. Применим топологический принцип Важевского [6]. С этой целью введем подмножество (U, v) в D_0. В качестве множеств Ω^0, U_α, V_β возьмем множества $\Omega^0=\{(x, \bar{y}): \mu_j(x, \bar{y})<0,\ v_k(x, \bar{y})<0\}$, для $j=\overline{m+1},\ n$, $k=\overline{1, m}$; $U_\alpha=\{(x, \bar{y}): u_\alpha(x, \bar{y})=0,\ u_j(x, \bar{y})\leqslant 0, v_k(x, \bar{y})\leqslant 0\}$ для $j=\overline{m+1}, n$, $k=\overline{1, m}$, $m+1\leqslant\alpha\leqslant n$, $\alpha\neq j$; $V_\beta=\{(x, \bar{y}): v_\beta(x, \bar{y})=0,$ $u_j(x, \bar{y})\leqslant 0, v_k(x, \bar{y})\leqslant 0\}$ для $j=\overline{m+1, n}$, $k=\overline{1, m}$, $1\leqslant\beta\leqslant m$, $\beta\neq k$, где $u_j(x, \bar{y})=u_j^1(x, \bar{y})\, u_j^2(x, \bar{y})$,

$$u_j^i(x, \bar{y})=\int\limits_{y_0}^{y_j}\frac{dt}{\alpha_j(t)}+[-1+(-1)^i\delta^j]\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{g_j(t)},\quad j=1, 2,\ j=\overline{m+1, n},$$

$$v_k(x, \bar{y})=v_k^1(x, \bar{y})\cdot v_k^2(x, \bar{y}),$$

$$v_k^i(x, \bar{y})=\int\limits_{+0}^{y_k}\frac{dt}{\alpha_k(t)}+[-1+(-1)^i\delta^k]\int\limits_{+0}^{x}\frac{dt}{g_k(t)},\quad i=1, 2,\quad k=\overline{1, m}.$$

Каждое из уравнений $u_j^i(x, \bar{y})\equiv u_j^i(x, y_j)=0$, $v_k^i(x, \bar{y})\equiv v_k^i(x, y_k)=0$, $i=1, 2$, $j=\overline{m+1, n}$, $k=\overline{1, m}$, определяет в D_0 y_j^i, $j=\overline{m+1, n}$, y_k^i, $k=\overline{1, m}$, $i=1, 2$ как неявную функцию. Покажем это, например, для уравнений $v_k^i(x, y_k)=0$, $i=1, 2$, $k=\overline{1, m}$. Проверим условия леммы о неявных функциях. Условия a), $в$) выполнены очевидно. Условие c) выполнено, так как

$$\frac{\partial}{\partial y_k}v_k^i(x, y_k)=\frac{1}{\alpha_k(y_k)}>0,\qquad \frac{\partial}{\partial x}v_k^i(x, y_k)=[-1+(-1)^i\delta^k]\frac{1}{g_k(x)}<0,$$

$$i=1, 2,\ k=\overline{1, m}.$$

Таким образом, уравнения $v_k^i(x, y_k)=0$ определяют неявные функции $y_k^i(x)\in D_0$, $y_k^i(+0)=0$, $y_i(x)\in C^{(1)}$ и, как нетрудно показать, имеет место неравенство $y_k^2(x)<y_k^1(x)$, $i=1, 2$, $k=\overline{1, m}$. Подобным образом показывается, что каждое из уравнений $u_j^i(x, y_j)=0$, $i=1, 2$, $j=\overline{m+1, n}$, определяет y_j^i как неявную функцию. В этом случае лемму о неявных функциях применяем к уравнениям

$$\left[\int\limits_{y_0}^{y_j}\frac{dt}{\alpha_j(t)}\right]^{-1}+\left[[-1+(-1)^i\delta^j]\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{g_j(t)}\right]^{-1}=0,\quad i=1, 2,\ j=\overline{m+1, n},$$

которые имеют те же решения. Для неявных функций $y_j^i(x)$ справедливо в D_0 неравенство: $y_j^1(x)<y_j^2(x)$, $j=\overline{m+1, n}$. Кроме того, $y_j^i(x)\in C^{(1)}$, $y_j^i(+0)=0$, $i=1, 2$, $j=\overline{m+1, n}$.

Найдем производные $\dot{u}_\alpha(x, \bar{y})$, $\alpha=\overline{m+1}, n$, $(x, \bar{y})\in U_\alpha$, $\dot{v}_\beta(x, \bar{y})$, $\beta=\overline{1, m}$, $(x, \bar{y})\in V_\beta$, вдоль траекторий системы (1). Нетрудно видеть, что

$$\dot{u}_\alpha(x, \bar{y})=\frac{2}{g_\alpha(x)}[\delta^\alpha(-1)^i f_\alpha(x, \bar{y})-(\delta^\alpha)^2]\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{g_\alpha(t)}>0,\quad i=1, 2;$$

$$\alpha=\overline{m+1, n},$$

$$\dot{v}_\beta(x, \bar{y})=\frac{2}{g_\beta(x)}[\delta^\beta(-1)^i f_\beta(x, \bar{y})-(\delta^\beta)^2]\int\limits_{+0}^{x}\frac{dt}{g_\beta(t)}<0,\quad i=1, 2;\ \beta=\overline{1, m}.$$

Таким образом, оправдана применимость топологического принципа. Существование $(n-m)$ параметрических семейств решений в Ω^0 обеспечено тем, что размерность сечения $(x=x_1)\cap\{u_j(x,\bar{y})<0\}$, $x_1\in(0,x_0)$, $j=\overline{m+1,n}$, в пространстве $(x, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ равна $(n-m)$. Каждое решение $\bar{y}(x)$ из Ω^0 удовлетворяет условиям $y_k^2(x)<y_k(x)<y_k^1(x)$, $k=\overline{1,m}$, $y_j^1(x)<y_j(x)<y_j^{(2)}(x)$, $j=\overline{m+1,n}$.
Значит, $\bar{y}(+0)=\bar{0}$. Неравенства (3_i), $i=1,2$, вытекают из вида множества Ω^0. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если выполнены все условия теоремы* 1, *кроме условий* 3), 4), *которые заменены условиями*

$$3')\ g_i(x)\in C^{(2)}(0,x_0),\ \alpha_i(y_i)\in C^{(2)}(0,y_0),\quad \lim_{x\to+0} g_i'(x)=\lim_{x\to+0}\alpha_i'(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{g_i(x)\,g_i''(x)}{[g_i'(x)]^2}=A_i\neq 0,\ A_i=\text{const},\qquad \lim_{x\to+0}\frac{\alpha_i(x)\,\alpha_i''(x)}{[\alpha_i'(x)]^2}=B_i\neq 0,$$

$$B_i=\text{const},\ i=\overline{1,m};$$

$$4')\ g_i(x)\in C^{(1)}(0,x_0),\ \alpha_i(y_i)\in C^{(1)}(0,y_0),\ g_i(+0)=\alpha_i(+0)=0,$$

$$\lim_{x\to+0} g'(x)=M_i,\ 0\leqslant M_i=\text{const},\ \lim_{x\to+0}\alpha_i'(x)=N_i,\quad 0\leqslant N_i=\text{const},$$

$$i=\overline{m+1,n},$$

то справедливо заключение доказанной теоремы 1.

Действительно, покажем, что новые условия 3′), 4′) вместе с условиями 1), 2) обеспечивают справедливость условий 3), 4). В силу условия 3′) можно найти пределы

$$\lim_{x\to+0}\int_{+0}^{x}\frac{dt}{g_i(t)}=\lim_{x\to+0}\int_{+0}^{x}\frac{A_i^{-1}g_i''(t)\,dt}{[g_i'(t)]^2}=-A_i^{-1}\lim_{x\to+0}\int_{+0}^{x}\left[\frac{1}{g_i'(t)}\right]'dt=$$

$$=-A_i^{-1}\lim_{x\to+0}\left[\frac{1}{g_i'(x)}-\frac{1}{g_i'(+0)}\right]=0,\quad i=\overline{1,m},$$

и, аналогично, $\lim\limits_{x\to+0}\int\limits_{+0}^{x}\frac{dt}{\alpha_i(t)}=0$, $i=\overline{1,m}$. Дальше, в силу условия 4′) заключаем, что при $x\to+0$ существуют положительные числа ε_i^0 такие, что $g_i'(x)<M_i+\varepsilon_i^0$, $i=\overline{m+1,n}$. Отсюда, интегрируя обе стороны неравенства в пределах $+0, x$, получаем $\frac{1}{(M_i+\varepsilon_i^0)\,x}<\frac{1}{g_i(x)}$. Интегрируя полученное неравенство в пределах $x_0, x, x<x_0$, получаем $\frac{1}{M_i+\varepsilon_i^0}\ln\frac{x}{x_0}>\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{g_i(t)}$. Отсюда уже видна расходимость интеграла $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dt}{g_i(t)}$ при $x\to+0$, $j=\overline{m+1,n}$. Аналогично показывается, что $\lim\limits_{x\to+0}\int\limits_{y_0}^{x}\frac{dt}{\alpha_i(t)}=-\infty$, $i=\overline{m+1,n}$.

1. *Андреев А. Ф.* Особые точки дифференциальных уравнений. —Минск: Вышейшая школа, 1979.— 136 с.
2. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1972.— 664 с.
3. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.— 280 с.
4. *Kamke E.* Differential gleichungen. I. Gewöhnliche differential gleichungen.— Leipzig: Akad. verlagsgeseltschaft, Gest & Fortig K.— C. 1964.— 316 S.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3-х т.— М.: Наука, 1966.— Т. I, 608 с.
6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.

Чехословакия

Поступила в редакцию
31.12.81