УДК 519.46

И. В. Протасов, Ю. В. Цыбенко

Связность в пространстве подгрупп

Пусть G — локально-компактная группа, $\mathfrak{L}(G)$ — пространство ее замкнутых подгрупп, наделенное топологией Шаботи [1], с. 304. Цель статьи — доказательство следующих утверждений.

Теорема 1. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ связно, то G содержит подгруппу, топологически изоморфную R (R — аддитивная группа вещественных чисел с естественной топологией). Для абелевых групп справедливо и обратное.*

Теорема 2. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ вполне несвязно, то G вполне несвязна либо компактно покрываема, т. е. каждый элемент G содержится в компактной подгруппе. Для абелевых групп справедливо и обратное.*

Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{F}(X)$ — семейство всех его замкнутых подмножеств. Следуя [2], будем говорить, что направленность $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, замкнутых подмножеств из X S-сходится к замкнутому подмножеству F, если: 1) для любого $x \in F$ и окрестности элемента x найдется такое

$\beta \in J$, что $F\alpha \cap U \neq \varnothing$ для всех $\alpha > \beta$; 2) для любого $y \notin F$ найдутся окрестность V элемента y и $\gamma \in J$ такие, что $F_\alpha \cap V \neq \varnothing$ для всех $\alpha > \gamma$.

Предположим, что на X непрерывно действует топологическая группа A по закону $(a, x) \to a(x)$. Отображение $(a, F) \to a(F)$ определяет действие A на $\mathfrak{F}(X)$. Покажем его непрерывность относительно S-сходимости. Пусть направленности $\{a_\alpha\}$, $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in J$, $a_\alpha \in A$, $F_\alpha \in \mathfrak{F}(X)$ сходятся и S-сходятся соответственно к $a \in A$ и $F \in \mathfrak{F}(X)$. Проверим S-сходимость направленности $\{a_\alpha(F_\alpha)\}$, $\alpha \in J$, к $a(F)$.

1). Пусть $x \in a(F)$, U-окрестность x, $y = a^{-1}(x)$. Пользуясь непрерывностью действия A на X, подберем окрестности V и U_1 для элементов a и y соответственно так, чтобы $b(z) \in U$ для любых $b \in V$, $z \in U_1$. Фиксируя $\beta \in J$ такое, что $F_\alpha \cap U_1 \neq \varnothing$, $a_\alpha \in V$ для всех $\alpha > \beta$, получаем $a_\alpha(F_\alpha) \cap \cap U \neq \varnothing$ при $\alpha > \beta$.

2). Пусть $y \notin a(F)$, $x = a^{-1}(y)$. Выберем окрестность U_1 элемента x и $\gamma \in J$ так, чтобы $F_\alpha \cap U_1 \neq \varnothing$ при $\alpha > \gamma$. Пользуясь непрерывностью действия A на X, подберем окрестности U, V для элементов y и a соответственно так, чтобы $b^{-1}(z) \in U_1$ для всех $b \in V$, $z \in U$. Увеличивая, если необходимо, γ, можно считать, что $a_\alpha \in V$ при $\alpha > \gamma$. Тогда $a_\alpha(F_\alpha) \cap U = \varnothing$ при $\alpha > \gamma$.

Применительно к нашей ситуации $X = G$ — локально-компактная группа, A — некоторая группа ее топологических автоморфизмов, топология которой согласуется с действием A на G (например, компактно-открыта). Обозначим $D_1(U) = \{H \in \mathfrak{L}(G) : H \subseteq U\}$, $D_2(V) = \{H \in \mathfrak{L}(G) : H \cap V \neq \varnothing\}$. Тогда семейство подмножеств $D_1(G \setminus K) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V_n)$, где K пробегает все компактные, а $V_1, \ldots, V_n$ — открытые подмножества из G, образует полную систему окрестностей топологии Шаботи на $\mathfrak{L}(G)$. Легко проверить, что S-сходимость в $\mathfrak{L}(G)$ эквивалентна сходимости в топологии Шаботи. Значит, A действует непрерывно на $\mathfrak{L}(G)$. Этот же факт можно извлечь из предложения 13 [1], с. 250, учитывая известную связь между топологией Шаботи и топологией пространства мер Хаара замкнутых подгрупп из G. Рассматриваемые группы предполагаются локально-компактными; подгруппами мы называем лишь замкнутые подгруппы. Для $X, Y \in \in \mathfrak{L}(G)$ полагаем $X \sim Y$, если X и Y содержатся в связном подмножестве из $\mathfrak{L}(G)$. Подгруппу, топологически порожденную подмножеством $F \subseteq G$, обозначим $\langle F \rangle$. Если подгруппа $\langle g \rangle$ бесконечна и дискретна, элемент $g \in \in G$ называется чистым.

Лемма 1. *Если $G = R \times G_1$, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ связано.*

Доказательство. Обозначим через A мультипликативную группу положительных вещественных чисел с естественной топологией, групповую операцию в первом сомножителе G записываем аддитивно. Умножив первую координату элементов G на элементы A, определим непрерывное действие A на G, а следовательно, и на $\mathfrak{L}(G)$. Пусть X — подгруппа из G, а $a(X)$ — образ X при автоморфизме $a \in A$, $A(X) = \{a(X),\ a \in A\}$ — орбита X. Из связности A и непрерывности действия A на $\mathfrak{L}(G)$ следует связность $A(X)$ в $\mathfrak{L}(G)$. В силу компактности $\mathfrak{L}(G)$ (см. [1], с. 297, или лемму 1 из [2]) направленность $\{a(X)\}$, $a \to 0$, имеет точки прикосновения. Пусть X_1 — одна из них. Из первого условия S-сходимости следует, что X_1 содержит подгруппу $X_2 = \langle 0 \rangle \times Y$, где Y — замыкание проекции X на G_1. Второе условие влечет $X_1 = K \times Y$, где K — некоторая подгруппа из R. Так как $X_1 \in \overline{A(X)}$, $X_1 \sim X$.

Далее покажем, что $X_1 \sim X_2$. Рассмотрим два случая.

1) K дискретна. Направленность $\{a(X_1)\}$, $a \to \infty$, сходится к X_2. Поскольку $X_2 \in \overline{A(X_1)}$ и $A(X_1)$ связна, $X_1 \sim X_2$.

2) $K = R$. Положим $X' = \langle 1 \rangle \times Y$. В силу 1) $X' \sim X_1$. С другой стороны, направленность $\{a(X')\}$, $a \to 0$, сходится к X_1. Значит, $X' \sim X_1$. Следовательно, $X_1 \sim X_2$.

Таким образом, задача свелась к доказательству эквивалентности любых подгрупп вида $\langle 0 \rangle \times Y$, где $Y \in \mathfrak{L}(G_1)$. Учитывая, что в пространстве подгрупп плотно множество топологически конечно-порожденных подгрупп, достаточно убедиться, что $Z_1 \sim Z_2$, где $Z_1 = \langle 0 \rangle \times Y_1$, $Z_2 = \langle 0 \rangle \times Y_2$, $Y_1 = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle$, $Y_2 = \langle y_1, \ldots, y_{n+1} \rangle$, $y_1, \ldots, y_{n+1} \in G_1$, $y_{n+1} \notin Y_1$.

Рассмотрим подгруппу Z', топологически порожденную подгрупой Z_1 и элементом $(1, y_{n+1}) \in G$. По доказанному выше $Z' \sim Z_2$. Направленность $\{a(Z')\}$, $a \to \infty$, сходится к Z_1. Значит, $Z' \sim Z_1$. Окончательно имеем $Z_1 \sim Z_2$.

Лемма 2. *Пусть K — открытый компактно покрываемый нормальный делитель G, g — чистый элемент из G. Отображение K в $\mathfrak{L}(G)$, заданное правилом $x \to \langle gx \rangle$, непрерывно.*

Доказательство. Пусть направленность $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится к $x \in K$. Первое условие S-сходимости направленности $\{\langle gx_\alpha \rangle\}$, $\alpha \in J$, и $\langle gx \rangle$ очевидно. Предположим, что второе условие не выполняется и точка $y \notin \in \langle gx \rangle$ доставляет контрпример. Выберем компактную окрестность U единицы из K так, чтобы $yU \cap \langle gx \rangle = \varnothing$. Для некоторого $\gamma \in J$ $\langle gx_\gamma \rangle \cap y$, $U \neq \varnothing$, т. е. $(gx_\gamma)^n \in yU$, n — целое. Фиксируем такое $\beta \in J$, что $(gx_\alpha)^n \notin \notin yU$ для всех $\alpha > \beta$. По предположению найдется такое $\delta > \beta$, что $\langle gx_\delta \rangle \cap yU \neq \varnothing$. Значит, $(gx_\delta)^m \in yU$ и $m \neq n$. Соотношения $(gx_\gamma)^n \in yU$, $(gx_\delta)^m \in yU$, $m \neq n$, с учетом инвариантности и компактной покрываемости K противоречат чистоте g.

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа, N — компактный нормальный делитель G. Подпространство $D_1(H)$ гомеоморфно $\mathfrak{L}(H)$, а естественный гомоморфизм G на G/N индуцирует непрерывное отображение $\alpha(G)$ на $\mathfrak{L}(G/H)$.*

Доказательство этой леммы следует из определения топологии Шаботи.

Лемма 4. *Если G компактна, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ несвязно.*

Доказательство. Пусть N — такой нормальный делитель, что $G_1 = G/N$ — группа Ли. Выберем открытую окрестность U единицы в G_1, не содержащую нетривиальных подгрупп. Тогда $D_1(U)$ в силу компактности G_1 будет окрестностью единичной подгруппы. Из изолированности единичной подгруппы в G_1 и леммы 3 следует, что $\mathfrak{L}(G)$ несвязно.

Пример группы G, равной полупрямому произведению тора и циклической группы порядка 2, показывает, что пространство компактной группы, вообще говоря, не является вполне несвязным.

Лемма 5. *Если G вполне несвязна, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ вполне несвязно.*

Доказательство. Выбирая для элементов базы топологии Шаботи (см. выше) $K, V_1, \ldots, V_n$ компактными и открытыми, получаем, что $D_1(G \setminus K) \cap D_2(V_1) \cap \ldots \cap D_2(V\ )$ открыто-замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$.

Лемма 6. *Если G абелева и компактно покрываема, то пространство $\mathfrak{L}(G)$ вполне несвязно.*

Доказательство вытекает из леммы 5 и существования гомеоморфизма между пространствами подгрупп двойственных абелевых групп (см. теорему 3 из [3]).

Первое утверждение теоремы 1 вытекает из лемм 3—5, второе — из леммы 1. Первое утверждение теоремы 2 следует из лемм 1, 2, второе — из лемм 5, 6.

В заключение отметим некоторые открытые вопросы.

Связно ли пространство $\mathfrak{L}(G)$ при условии, что G содержит подгруппу, топологически изоморфную R? Предполагаемый ответ отрицателен.

При каких условиях на G пространство $\mathfrak{L}(G)$ будет связным многообразием? Известно [4], что $\mathfrak{L}(R)$ гомеоморфно отрезку, а $\mathfrak{L}(R^2)$ — четырехмерной сфере Там же отмечено без доказательства, что $\mathfrak{L}(R^n)$ не является многообразием при $n \geqslant 3$

Какие многообразия реализуются в качестве подпространств $\mathfrak{L}(G)$?

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Векторное интегрирование Мера Хаара. Свертка и представления.— М.: Наука. 1970.— 350 с
2. *Протасов И В* Локальные теоремы для топологических групп.— Изв. АН СССР Сер. мат 1979, **43**, № 6, с. 1430—1440.

3. *Протасов И. В.* О дуализмах топологических абелевых групп.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 3, с. 207—211.
4. *Pourezza I., Hubbard J.* The space of closed subgroups of R^2.— Topology, 1979, **18**, N **2**, p. 143—146.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
09.05.81