УДК 517.53

Я. И. Савчук

О множестве дефектных векторов целых кривых

Без пояснений используются основные результаты теории целых кривых, а также обозначения из [1] с двумя отступлениями: 1) вместо $\overset{0}{m}$ будем писать m; 2) не будем требовать, чтобы компоненты целой кривой не имели общих нулей, в связи с чем характеристику целой кривой $\mathbf{G}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^p$ определим так:

$$T(r, \mathbf{G}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \| \mathbf{G}(re^{i\varphi}) \| d\varphi - N(r, \| \mathbf{G} \|),$$

где $n(r, \|\mathbf{G}\|)$ — количество нулей $\|\mathbf{G}(z)\|$ в круге $\{z : |z| \leqslant z\}$, а $N(r, \|\mathbf{G}\|)$ строится по $n(r, \|\mathbf{G}\|)$ обычным способом.

В работе решается задача о возможной структуре множества дефектных векторов целых кривых $\mathbf{G}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^p$. Для $p = 2$ эта задача равносильна вопросу о множестве дефектных значений мероморфных функций, решение которого известно более 20 лет [2, гл. IV, § 4]. При $p > 2$ были известны [3] лишь частные результаты. Будем рассматривать случай, когда $0 < \rho < \infty$ (ρ — порядок целой кривой $\mathbf{G}$). При $\rho = \infty$ доказываемая теорема также справедлива и идея доказательства существенно не отличается. Однако при $\rho = \infty$ используется другая конструкция (ср. [4, гл. IV, § 4.1]), позволяющая получить информацию не только о дефектных векторах, но и о возможной величине дефектов. Случай $\rho = 0$ обладает рядом особенностей. В то время как при $\rho > 0$ допустимая система дефектных векторов не более чем счетна, в случае $\rho = 0$ она может содержать не более $p - 1$ векторов [5, следствие 1; 6, следствие 1].

Теорема. *Пусть* $\{A_j\}_{j=1}^{q}$ $(0 \leqslant q \leqslant \infty)$ — *произвольная система подпространств из* $\mathbf{C}^p$, $\dim A_j \leqslant p - 1$, $0 < \rho < \infty$. *Тогда будет существовать целая кривая* $\mathbf{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z))$ *порядка* ρ *с линейно независимыми компонентами, для которой*: а) *произвольный вектор* $\mathbf{a} \in A = \bigcup\limits_{j=1}^{q} A_j$, $\mathbf{a} \neq 0$, *будет дефектным, т. е.* $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{G}) > 0$; б) *для* $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^p \setminus A$ *будет выполняться* $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{G}) = 0$.

В частности, можно взять $\dim A_j = 1$ для всех j, тогда $A = \{\lambda \mathbf{a}_j : \lambda \in \mathbf{C}, \mathbf{a}_j \in A'\}$, где A' — произвольная не более чем счетная система векторов.

В работе [3] в аналогичном утверждении система векторов не произвольна, а допустима и выбирается некоторым специальным способом.

Доказательство. Не будем исключать возможности $\dim A_k = 0$ (т. е. $A_k = \{0\}$). Тогда можно ограничиться случаем $q = \infty$. Для удобства перенумеруем подпространства A_j таким образом, что $A = \bigcup\limits_{j=-\infty}^{\infty} A_j$, $A_0 = \{0\}$. Сначала будем строить искомую целую кривую $G(z)$ при $0 < \rho < 1/2$.

Для векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ через $\mathbf{ab}$ будем обозначать их скалярное произведение, т. е. $\mathbf{ab} = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2 + \ldots + a_p\bar{b}_p$, где a_j и b_j — компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пусть подпространство $A_i \subset A$ имеет размерность $(p - n_j)$, $1 \leqslant n_j \leqslant p$. Тогда будут существовать линейно независимые векторы $\mathbf{b}_j^{(1)}, \mathbf{b}_j^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}_i^{(n_j)}$

такие, что для произвольного вектора $\mathbf{a}_j \in A_j$

$$\mathbf{a}_j \mathbf{b}_j^{(s)} = 0, \ s = 1, 2, \ldots, n_j, \tag{1}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^{n_j} \| \mathbf{b}_j^{(s)} \| < \infty. \tag{2}$$

Для многочленов $P_{jk}(z)$ и $Q_j(z, \mathbf{a})$ введем обозначения $(1 \leqslant k \leqslant p)$: $P_{jk}(z) = b_{jk}^{(1)} + b_{jk}^{(2)} z + \ldots + b_{jk}^{(n_j)} z^{n_j - 1}$, $Q_j(z, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{p} P_{jk}(z) \cdot \overline{a}_k = (\mathbf{b}_j^{(1)} + \mathbf{b}_j^{(2)} z + {} + \mathbf{b}_j^{(n_j)} z^{n_j - 1}) \mathbf{a}$.

Поскольку векторы $\mathbf{b}_j^{(1)}, \mathbf{b}_j^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}_j^{(n_j)}$ линейно независимы и $\dim A_j = (p - n_j)$, то равенство (1) выполняется только для векторов из A_j. Для $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^p \setminus A_j$ имеем

$$\sum_{s=1}^{n_j} | \mathbf{a} \mathbf{b}_j^{(s)} | > 0. \tag{3}$$

Поэтому

$$Q_j(z, \mathbf{a}) \not\equiv 0, \quad \mathbf{a} \overline{\in} A_j; \quad Q_j(z, \mathbf{a}) \equiv 0, \quad \mathbf{a} \in A_j, \tag{4}$$

и в силу (2) $(r = |z|)$

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=-\infty}^{\infty} | P_{jk}(z) | = O(r^{p-1}), \ r \to \infty,$$

$$Q(z, \mathbf{a}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} | Q_j(z, \mathbf{a}) | = O(r^{p-1}), \ r \to \infty.$$

Выберем последовательность θ_j такую, что $-\pi < \theta_j < \pi$, $\theta_0 = 0$, $\theta_{j+1} > \theta_j$, $\theta_j \to \pi$ при $j \to +\infty$, $\theta_j \to -\pi$ при $j \to -\infty$.

Возьмем $g_k(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{jk}(z) V(z \exp(-i\theta_j))$, $k = 1, 2, \ldots, p$, где $V(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z n^{-1/\rho})$. Так как $A_0 = \{0\}$, то $n_0 = p$, и поэтому $\sum_{s=1}^{n_0} | \Lambda \mathbf{b}_0^{(s)} | > 0$ при всех $\Lambda \in \mathbf{C}^p \setminus \{0\}$. Тогда

$$g_1(z) \lambda_1 + g_2(z) \lambda_2 + \ldots + g_p(z) \lambda_p = \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} (\mathbf{b}_j^{(1)} \Lambda + \mathbf{b}_j^{(2)} \Lambda z + \ldots + \mathbf{b}_j^{(n_j)} \Lambda z^{n_j - 1}) \times$$

$$\times V(z \exp(-i\theta_j)) + (\mathbf{b}_0^{(1)} \Lambda + \mathbf{b}_0^{(2)} \Lambda z + \ldots + \mathbf{b}_0^{(p)} \Lambda z^{p-1}) V(z) \not\equiv 0$$

при $\Lambda = (\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_p) \neq 0$, так как $V(re^{i\varphi}) = o(V(r) \cdot r^{2-p})$, $r \to \infty$, при $\varphi \in (0, 2\pi)$. Это значит, что $g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z)$ — линейно независимые целые функции.

Покажем, что $\mathbf{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z))$ — искомая целая кривая. Известно (см., например, [2, гл. 11, § 5]), что $\ln M(r, V) = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} r^\rho + o(r^\rho)$, $r \to \infty$; при $\varphi \in [-\pi, \pi]$ равномерно выполняется $\ln | V(re^{i\varphi}) | \leqslant \frac{\pi \cos \varphi\rho}{\sin \pi\rho} r^\rho + o(r^\rho)$, $r \to \infty$, причем при $\varphi \in [-\pi + \delta, \pi - \delta]$, $\delta > 0$, равномерно выполняется $\ln | V(re^{i\varphi}) | = \frac{\pi \cos \varphi\rho}{\sin \pi\rho} r^\rho + o(r^\rho)$, $r \to \infty$. Отсюда

$$T(r, \mathbf{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \| \mathbf{G}(re^{i\varphi}) \| \, d\varphi - N(r, \| \mathbf{G} \|) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{p} \ln M(r, g_j) + O(1) \leqslant \frac{p\pi}{\sin \pi\rho} r^\rho + o(r^\rho), \ r \to \infty. \tag{5}$$

Зафиксируем число $m \in \mathbf{Z}$. Определим $\theta_j' \equiv \theta_j \pmod{2\pi}$, $\theta_m - \pi < \theta_j' < \theta_m + \pi$. Очевидно, $\theta'_{m\pm1} = \theta_{m\pm1}$. Возьмем $\eta = \eta(m)$, $0 < \eta < (\theta_{m+1} - \theta_{m-1})/4$ и рассмотрим целую кривую $\mathbf{G}$ в углу $W_m = W_m(\eta) = \{z: (\theta_m + \theta_{m-1})/2 + \eta < \varphi = \arg z < (\theta_{m+1} + \theta_m)/2 - \eta\}$. Так как $P_{jk}(z)$ — многочлен, то при $r = |z| \geqslant r_0(j)$ выполняется $|P_{jk}(z)| \geqslant 1$, $c_j > 0$, $\exists k$.

Поскольку все коэффициенты многочленов $Q_j(z, \mathbf{a})$ ограничены одной и той же постоянной, не зависящей от j, то $(r = |z|)$ $Q_j(z, \mathbf{a}) = O(r^{p-1})$, $r \to \infty$, равномерно относительно j, $c_j > 0$, $\exists k$.

Теперь пусть $\mathbf{a} \in A_m$. Тогда

$$\frac{|\mathbf{G}(z)\cdot\mathbf{a}|}{\|\mathbf{G}(z)\|} = \frac{\left|\sum\limits_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty} Q_j(z, \mathbf{a})\, V(z\exp(-i\theta_j'))\right|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{p}\left|\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} P_{jk}(z)\, V(z\exp(-i\theta_j'))\right|^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\left|\sum\limits_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty} Q_j(z, \mathbf{a}) \dfrac{V(z\exp(-i\theta_j'))}{V(z\exp(-i\theta_m))}\right|}{\left\{\sum\limits_{k=1}^{p}\left|P_{mk}(z) + \sum\limits_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty} P_{jk}(z)\dfrac{V(z\exp(-i\theta_j'))}{V(z\exp(-i\theta_m))}\right|^2\right\}^{1/2}}.$$

Продолжая рассуждения, как в [2, с. 164 — 165], получаем $\ln\left|\dfrac{V(r\exp\{i(\varphi-\theta_j')\})}{V(r\exp\{i(\varphi-\theta_m)\})}\right| \leqslant -A_m(\eta) r^\rho + o(r^\rho)$, $r \to \infty$, $A_m(\eta) > 0$, $j \neq m$, равномерно относительно φ и j в углу W_m. Отсюда $(z = re^{i\varphi})$

$$\frac{|\mathbf{G}(z)\,\mathbf{a}|}{\|\mathbf{G}(z)\|} = \frac{O(r^{p-1})}{\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{k=1}^{p}|P_{mk}(z)|^2\right)^{1/2}} \exp\{-r^\rho A_k(\eta) + o(r^\rho)\} =$$

$$= \exp\{-r^\rho A_m(\eta) + o(r^\rho)\},\ r \to \infty, \tag{6}$$

равномерно в углу W_m.

На основании (6) получаем

$$m(r, \mathbf{a}) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\theta_m+\theta_{m-1})/2+\eta}^{(\theta_{m+1}+\theta_m)/2-\eta} \ln\frac{\|\mathbf{G}(re^{i\varphi})\|\cdot\|\mathbf{a}\|}{|\mathbf{G}(re^{i\varphi})\cdot\mathbf{a}|}\, d\varphi + O(1) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}((\theta_{m+1} - \theta_{m-1})/2 - 2\eta)\, r^\rho A_m(\eta) + o(r^\rho),\ r \to \infty. \tag{7}$$

Учитывая (5) и (7), получаем, что порядок целой кривой $\mathbf{G}(z)$ равен ρ и $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{G}) > 0$.

Таким образом, мы показали (при $0 < \rho < 1/2$), что для построенной кривой выполняется утверждение а). Покажем теперь, что имеет место б).

Пусть $\mathbf{a} \bar{\in} A$. Тогда при всех $j \in \mathbf{Z}$ будет выполняться неравенство (3), и поэтому $Q_j(z, \mathbf{a}) \not\equiv 0$. Очевидно, что $|Q_j(z, \mathbf{a})| \geqslant d_j > 0$, $r = |z| \geqslant r_0(j)$.

Отсюда $(|z|=r\geqslant r_0(m))$

$$\frac{\|\mathbf{G}(z)\|}{|\mathbf{G}(z)\,\mathbf{a}|}=\frac{\left\{\sum_{k=1}^{p}\left|P_{mk}(z)+\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty}P_{jk}(z)\frac{V(z\exp(-i\theta_j))}{V(z\exp(-i\theta_m))}\right|^2\right\}^{1/2}}{\left|Q_m(z,\mathbf{a})+\sum_{\substack{j=-\infty\\ j\neq m}}^{\infty}Q_j(z,\mathbf{a})\frac{V(z\exp(-i\theta_j))}{V(z\exp(-i\theta_m))}\right|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{d_j}\left(\sum_{k=1}^{p}|P_{mk}(z)|^2\right)^{1/2}=O(r^{p-1}),\ r\to\infty, \tag{8}$$

равномерно в углу $W_m(\eta)$.

Нам понадобится лемма.

Лемма. *Пусть* $\mathbf{G}(z)$ — *целая* p*-мерная кривая,* k *и* μ — *некоторые положительные числа,* $k>1$, $0<\mu\leqslant 2\pi$, $\mathbf{a}$ — p*-мерный вектор. Существует постоянная* $C_2(k,\mu)$ *такая, что для любого измеримого множества* $E_r\subset[-\pi,\pi]$ *такого, что* $\operatorname{mes}E_r\leqslant\mu$, *при* $r\geqslant r_0>1$ *выполняется*

$$\int_{E_r}\ln\frac{\|\mathbf{G}(re^{i\varphi})\|\,\|\mathbf{a}\|}{|\mathbf{G}(re^{i\varphi})\,\mathbf{a}|}\,d\varphi\leqslant C_2(k,\mu)\,T(kr,\mathbf{G}), \tag{9}$$

где $C_2(k,\mu)=p^2\dfrac{6k}{k-1}\mu\ln\dfrac{2\pi e}{\mu}$ *при* $\mu\to 0$.

Эта лемма—аналог для целых кривых теоремы 7.3 из [2].

Доказательство. Обозначим $f_j(z)=\dfrac{g_j(z)}{\mathbf{G}(z)\,\mathbf{a}}$. Очевидно, что $f_j(z)$ — мероморфная в $\mathbf{C}$ функция. Далее,

$$\sum_{j=1}^{p}T(r,f_j)=\sum_{j=1}^{p}T\left(r,\frac{g_j}{\mathbf{G}\mathbf{a}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{s\neq j}T(r,g_s/g_j)+O(1)\right)\leqslant p(p-1)\,T(r,G)+O(1),\ z\to\infty, \tag{10}$$

$$\ln\frac{\|\mathbf{G}(z)\|\,\|\mathbf{a}\|}{|\mathbf{G}(z)\,\mathbf{a}|}\leqslant\ln\frac{|g_1(z)|+|g_2(z)|+\ldots+|g_p(z)|}{|\mathbf{G}(z)\,\mathbf{a}|}+$$

$$+\ln\|\mathbf{a}\|\leqslant\sum_{j=1}^{p}\ln^+\left|\frac{g_j(z)}{\mathbf{G}\mathbf{a}(z)}\right|+O(1)=\sum_{j=1}^{p}\ln^+|f_j(z)|+O(1). \tag{11}$$

Воспользовавшись теоремой 7.3 из [2] и неравенствами (10) и (11), имеем

$$\int_{E_r}\ln\frac{\|\mathbf{G}(re^{i\varphi})\|\,\|\mathbf{a}\|}{|\mathbf{G}(re^{i\varphi})\,\mathbf{a}|}\,d\varphi\leqslant\sum_{j=1}^{p}\int_{E_r}\ln^+|f_j(re^{i\varphi})|\,d\varphi+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{p}C_1(k,\mu)\,T(kr,f_j)+O(1)\leqslant p(p-1)\,C_1(k,\mu)\,T(kr,\mathbf{G})+O(1)\leqslant$$

$$\leqslant p^2C_1(k,\mu)\,T(kr,\mathbf{G}),\ C_1(k,\mu)=\frac{6k}{k-1}\mu\ln\frac{2\pi e}{\mu}$$

Возьмем произвольное $\mu > 0$. Очевидно, существует $n_0 = n_0(\mu) \in \mathbf{N}$ такое, что

$$(\pi - \theta_{n_0}) + (\theta_{-n_0} + \pi) < \mu/2. \tag{12}$$

Выберем $\eta(s)$, $-n_0 \leqslant s \leqslant n_0$ так, что

$$\sum_{s=-n_0}^{n_0} \eta(s) < \mu/4. \tag{13}$$

Оценим $m(r, \mathbf{a})$:

$$m(r, \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln \frac{\| \mathbf{G}(re^{i\varphi}) \| \, \| \mathbf{a} \|}{| \mathbf{G}(re^{i\varphi})\, \mathbf{a} |} d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{E_r} \ln \frac{\| \mathbf{G}(re^{i\varphi}) \|}{| \mathbf{G}(re^{i\varphi})\, \mathbf{a} |} d\varphi +$$

$$+ \sum_{s=-n_0}^{n_0} \frac{1}{2\pi} \int_{(\theta_s+\theta_{s-1})/2+\eta(s)}^{(\theta_{s+1}+\theta_s)/2-\eta(s)} \ln \frac{\| \mathbf{G}(re^{i\varphi}) \|}{| \mathbf{G}(re^{i\varphi})\, \mathbf{a} |} d\varphi + \ln \| \mathbf{a} \| = \sigma_1 + \sigma_2 + \ln \| \mathbf{a} \|, \tag{14}$$

где $E_r = \left\{ \bigcup_{s=-n_0}^{n_0-1} [(\theta_{s+1} + \theta_s)/2 - \eta(s),\ (\theta_{s+1} + \theta_s)/2 + \eta(s)] \right\} \cup \{[-\pi, (\theta_{-n_0} + \theta_{-n_0+1})/2 - \eta(-n_0)]\} \cup \{[(\theta_{n_0} + \theta_{n_0+1})/2 - \eta(n_0), \pi]\}$. Очевидно, в силу (12) и (13) $\operatorname{mes} E_r < \mu$. Согласно лемме

$$\sigma_1 \leqslant C_2(k, \mu)\, T(kr, \mathbf{G}) \leqslant C_2(k, \mu)\, C(k)\, T(r, \mathbf{G}),\ C(k) = \text{const}. \tag{15}$$

Последнее неравенство получено в силу того, что $T(r, \mathbf{G}) = O(r^\rho)$, $r^\rho = O(T(r, \mathbf{G}))$.

Поскольку в σ_2 входит конечная сумма слагаемых, то на основании (8) имеем

$$\sigma_2 = O(\ln r) = o(T(r, \mathbf{G})),\ r \to \infty. \tag{16}$$

Объединяя (14), (15) и (16), получаем $m(r, \mathbf{a}) \leqslant C_2(k, \mu)\, C(k)\, T(r, \mathbf{G}) + o(T(r, \mathbf{G}))$. Отсюда $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{G}) \leqslant C_2(k, \mu)\, C(k)$. Поскольку $C_2(k, \mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, то $\delta(\mathbf{a}, \mathbf{G}) = 0$, т. е. $\mathbf{a} \in \mathbf{C}^p \setminus A$ не является дефектным вектором для построенной нами целой кривой $\mathbf{G}$.

Нетрудно проверить, что если $\mathbf{G}_1(z) = \mathbf{G}(z^n)$, то $\rho(\mathbf{G}_1) = n\rho(\mathbf{G})$. Учитывая это и рассматривая целые кривые $\mathbf{G}(z^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, можно получить примеры целых кривых с множеством дефектных векторов, совпадающим с A, и любым порядком $0 < \rho < n/2$. Поскольку n может быть сколь угодно большим, то и порядок ρ может быть любым положительным конечным числом.

1. *Гольдберг А. А.* Некоторые вопросы теории распределения значений мероморфных функций.— Дополнение к кн.: Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М. : Физматгиз, 1960.—319 с.
2. *Гольдберг А. А.*, *Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
3. *Хуссайн М.* О дефектах и величинах отклонений целых кривых.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1974, вып. 20, с. 161—170.
4. *Хейман У. К.* Мероморфные функции.— М..: Мир, 1966.— 287 с.
5. *Toda N.* Sur la croissance de fonction algebroides á valeurs deficientes.— Kodai Math. Sem. Rep., 1970, 22, N 3, p. 323—337.
6. *Петренко В. П.* О росте целых кривых нижнего порядка $\lambda < 1$.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1974, вып. 20, с. 134—141

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.09.81