УДК 517.934

Б. И. Сокил

Об асимптотическом представлении решения одной нелинейной системы при резонансе

Для системы двух нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} + \alpha y^{\nu} = \varepsilon f(x, y, \mu t), \quad \dot{y} - x^{\frac{1}{\nu}} = \varepsilon g(x, y, \mu t) \tag{1}$$

в предположении, что $f(x, y, \mu t)$, $g(x, y, \mu t)$ — аналитические 2π-периодические по μt функции, $\nu = (2m+1)/(2l+1)$, $m, l = 0, 1, 2 \ldots$, ε—малый параметр, строится асимптотическое разложение решения в случае главного резонанса.

В работе [1] показано, что в первом приближении для автономной ($\mu = 0$) системы (1) существует изохронный колебательный процесс с периодом

$$T = \frac{2}{\nu+1}\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} \Gamma\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu+1}\right). \tag{2}$$

Поэтому предполагается, что частота μ внешнего периодического воздействия на систему, движение которой описывается уравнениями (1), близка к частоте собственных колебаний невозмущенной ($\varepsilon = 0$) системы (1), т. е. $\mu \approx 2\pi/T$.

Следуя идее u-методики [2, 3], решения уравнений (1) представим в виде асимптотических рядов.

Исходя из определения периодических Ateb-функций [5], 2π-периодическое решение невозмущенной системы (1) запишем в виде

$$y = a\,\mathrm{ca}\left(\nu, \frac{1}{\nu}, \frac{\nu+1}{2}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} t\right),$$

$$x = a^{\nu}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \mathrm{sa}\left(\frac{1}{\nu}, \nu, \frac{\nu+1}{2}\left(\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} t\right). \tag{3}$$

Используя методы построения асимптотических решений [4], после несложных выкладок находим

$$v\frac{\nu+1}{\nu}\frac{\partial^2 U_j}{\partial u^2} + \mu^2 v^{\frac{\nu-1}{\nu}}\frac{\partial^2 U_j}{\partial \varphi^2} + 2\mu v\frac{\partial^2 U_j}{\partial u \partial \varphi} - \alpha u^{\nu}\left(1 + \mu\frac{\nu-1}{\nu}v^{-\frac{1}{\nu}}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial U_j}{\partial u} + \alpha u^{\nu+1} U_j = \Phi_j(a, u, \varphi) + \alpha(a, u, \varphi) A_j(a, \theta) + \beta_0(a, u, \varphi) B_j(a, \theta), \tag{4}$$

где $\Phi_j(a, u, \varphi)$, $\alpha_0(a, u, \varphi)$, $\beta_0(a, u, \varphi)$ — некоторые известные функции. Решение (4) будем искать в виде

$$U_j(a, u, \varphi) = \sum_n U_{jn}(a, u)\exp(in\varphi), \tag{5}$$

при этом предполагается, что функции $A_j(a, \theta)$ и $B_j(a, \theta)$ также представляются рядами

$$A_j(a, \theta) = \sum_n A_{jn}(a)\exp(-in\theta), \quad B_j(a, \theta) = \sum_n B_{jn}(a)\exp(-in\theta). \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках φ, получаем

$$\frac{\alpha}{\nu}(a^{\nu+1} - u^{\nu+1})\frac{\partial^2 U_{jn}}{\partial u^2} - (\alpha u^{\nu} + 2in\mu v)\frac{\partial U_{jn}}{\partial u} +$$
$$+\left(in\mu\alpha\frac{\nu-1}{\nu}u^{\nu}v^{\frac{1}{\nu}} + \alpha u^{\nu-1} - n^2\mu^2 v^{\frac{\nu-1}{\nu}}\right)U_{jn} = \Phi_{jn}(a, u) +$$
$$+\alpha_n^*(a, u) A_{jn}(a) + \beta_n^*(a, u) B_{jn}(a), \tag{7}$$

где

$$\Phi_{jn}(\ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_j(a, u, \varphi)\exp(-in\varphi)\,d\varphi,\quad \alpha_n^{(*)}(\ldots) = \alpha_0(a, u, \varphi)\exp(-in\varphi).$$

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (7). Его частными решениями являются функции

$$U^*(a, u) = (a^{\nu+1} - u^{\nu+1})^{\frac{1}{\nu+1}}\exp(in\mu\rho(a, u)); \tag{8}$$

$$U^{**}(a, u) = U^*(a, u)\int (a^{\nu+1} - u^{\nu+1})^{-\frac{2+\nu}{1+\nu}}\,du, \tag{9}$$

где $\rho(a, u) = \int_0^u (a^{\nu+1} - u^{\nu+1})^{-\frac{1}{\nu+1}}\,du$.

Частное же решение неоднородного уравнения (7) имеет вид

$$U_{jn}(a, u) = U^*(a, u)\left\{\int_0^u (a^{\nu+1} - u^{\nu+1})^{-\frac{2+\nu}{1+\nu}}\,du \int [\Phi_{jn}^*(a, u)\,U^*(a, u)]\,du - \right.$$

$$\left. - \int [\Phi_{jn}^*(a, u)\,U^*(a, u)]\,du\right\}, \tag{10}$$

где $\Phi_{jn}^*(a, u)$ — правая часть уравнения (7).

Определим функции $A_{jn}(a)$ и $B_{jn}(a)$. При этом используем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $L(p, U_{jn})$ — оператор вида*

$$L(p, U_{jn}) = \frac{\alpha}{\nu}(a^{\nu+1} - u^{\nu+1})\,p^2 U_{jn} - (\alpha u^\nu + 2in\mu v)\,pU_{jn} +$$

$$+ \left(in\mu\alpha\,\frac{\nu - 1}{\nu}\,u^\nu v^{\frac{1}{\nu}} - n^2\mu^2 + \alpha u^{\nu-1}\right)U_{jn},\quad p = \frac{\partial}{\partial u}, \tag{11}$$

а $U_{jn}(a, u)$ — непрерывные вместе со своими частными производными по u до второго порядка включительно функции, удовлетворяющие условиям

$$U_{jn}(a, u)\big|_{u=\pm a} = 0. \tag{12}$$

Тогда будет выполняться тождество

$$\int_{-a}^{a} L(p, U_{jn})\exp(-in\mu\rho(a, u))\,du = 0. \tag{13}$$

Лемма 2. *Пусть $L(p, U_{jn})$ — оператор, а $U_{jn}(a, u)$ — функции, описанные в лемме* 1. *Тогда будет существовать и единственное* $\lambda = -(2+\nu)/(1+\nu)$ *такое, при котором будет выполняться тождество*

$$\int_{-a}^{a} \{L(p, U_{jn})\exp(-in\mu\rho(a, u))\int (a^{\nu+1} - u^{\nu+1})^{\lambda}\,du\}\,du = 0. \tag{14}$$

Справедливость лемм легко проверяется прямым интегрированием с учетом условий (12).

Используя результаты лемм 1 и 2, из (7) получаем функции $A_{jn}(a)$ и $B_{jn}(a)$ в виде

$$A_{jn}(a) = \frac{\bar{\Phi}_{jn}(a)\,\tilde{\beta}_n(a) - \tilde{\Phi}_{jn}(a)\,\bar{\beta}_n(a)}{\bar{\alpha}_n(a)\tilde{\beta}_n(a) - \tilde{\alpha}_n(a)\,\bar{\beta}_n(a)},$$

$$B_{jn}(a) = \frac{\bar{\Phi}_{jn}(a)\,\tilde{\alpha}_n(a) - \tilde{\Phi}_{jn}(a)\,\bar{\alpha}_n(a)}{\bar{\alpha}_n(a)\,\tilde{\beta}_n(a) - \tilde{\alpha}_n(a)\,\bar{\beta}_n(a)}, \tag{15}$$

где

$$\overline{\alpha}_n(a)=\int\limits_{-a}^{a}\{\alpha_n^*(a,u)\exp(-in\mu\rho(a,u))\}\,du,$$

$$\tilde{\alpha}_n(a)=\int\limits_{-a}^{a}\{\alpha_n^*(a,u)\exp(-in\mu\rho(a,u))\times\int(a^{\nu+1}-u^{\nu+1})^{-\frac{2+\nu}{1+\nu}}du\}\,du,$$

$$\overline{\beta}_n(a)=\int\limits_{-a}^{a}\{\beta_n^*(a,u)\exp(-in\mu\rho(a,u))\}\,du,$$

$$\tilde{\beta}_n(a)=\int\limits_{-a}^{a}\{\beta_n^*(a,u)\exp(-in\mu\rho(a,u))\int(a^{\nu+1}-u^{\nu+1})^{-\frac{2+\nu}{1+\nu}}du\}\,du,$$

$$\overline{\Phi}_{jn}(a)=\int\limits_{-a}^{a}\{\Phi_{jn}(a,u)\exp(-in\mu\rho(a,u))\}\,du,$$

$$\tilde{\Phi}_{jn}(a)=\int\limits_{-a}^{a}\{\Phi_{jn}(a,u)\exp(-in\mu\rho(a,u))\int(a^{\nu+1}-u^{\nu+1})^{-\frac{2+\nu}{1+\nu}}du\}\,du.$$

Таким образом, соотношения (5), (6), (10) и (15) позволяют исследовать в случае главного резонанса колебательный процесс системы, движение которой описывается уравнениями (1) [4].

Отметим, что изложенные результаты легко переносятся на случай, когда движение системы описывается дифференциальным уравнением второго порядка $\ddot{y}+\omega_0^2 y^{1-\nu}y^{\nu}=\varepsilon F(y,\dot{y},\mu t)$.

1. *Сокил Б. И.* Асимптотический метод решения прямой и обратной задачи динамики для нелинейных колебательных систем : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1977.— 16 с.
2. *Митропольский Ю. О., Сеник П. М.* Побудова асимптотичного розв'язку для автономної системи з сильною нелінійністю.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1961, № 1, с. 839—844.
3. *Сеник П. М. Сокіл Б. І.* Про використання *u*-методики для одного класу коливних систем.— Там же, 1977, № 1, с. 12—16.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
5. *Сеник П. М.* Обернення неповної Beta-функції.— Укр. мат. журн., 1969, 21, № 3, с. 325—333.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию
12.04.81