

УДК 531.38.36:539.3:629.191.2

Ю. А. Митропольский, В. Н. Кошляков, В. Н. Калинович,
В. А. Стороженко, М. Е. Темченко

О работах по прикладной теории гироскопов, механике твердого и деформируемого тела в Институте математики АН УССР

Развитие прикладной теории гироскопов, механики твердого и деформируемого тел в Институте математики АН УССР в большой степени связано с научно-организаторской деятельностью академика Александра Юльевича Ишлинского, работавшего в этом институте с 1947 по 1965 гг.: с 1948 по 1955 г. он был директором Института математики АН УССР; с 1955 по 1965 г. — заведующим отделом общей механики на общественных началах.

В настоящем обзоре мы остановимся преимущественно на исследованиях, прямым или косвенным образом связанных с деятельностью А. Ю. Ишлинского в Институте математики АН УССР и продолженных в работах его учеников и последователей. Предлагаемый вниманию читателя обзор касается следующих направлений: 1) механики деформируемого тела; 2) прикладной теории гироскопов и систем инерциальной навигации; 3) динамики твердого тела.

1. Механика деформируемого тела. В начале своей деятельности в Институте математики АН УССР А. Ю. Ишлинский занимался в основном вопросами механики деформируемого тела. Одним из первых исследований в этом направлении была работа, выполненная им совместно с академиком М. А. Лаврентьевым, посвященная изучению статической и динамической устойчивости упругих систем.

Она возникла вследствие анализа большого количества полученных к тому времени экспериментальных данных. Оказалось, что при действии внезапно возникших нагрузок процесс потери устойчивости упругих систем происходит по линии образования высших форм искривления их исходного геометрического состояния, неустойчивых при обычном статическом нагружении. В результате детального изучения подмеченного явления была предложена теория динамической устойчивости, по-новому освещающая работу сжатых конструкций, подверженных импульсивным воздействиям. Эта теория нашла признание в нашей стране и за рубежом.

Важные результаты получил А. Ю. Ишлинский в проблеме разрушения хрупких тел. Эти исследования возникли вследствие рассмотрения одного интересного биологического вопроса — установления закономерностей расщипывания коры деревьев. Полученные им результаты могут быть использованы и в ряде других проблем, в частности технологических.

В 1954 г. А. Ю. Ишлинский решил знаменитую задачу Эйлера о продольном изгибе методами математической теории упругости, оставляя неизменными уравнения равновесия и уточняя граничные условия. Проведенные вычисления подтвердили точность формулы Эйлера до долей процента. Предложенный автором подход к решению задач устойчивости с точки зрения общих уравнений теории упругости дает возможность определять не только критические усилия, но и исследовать напряженное и деформированное состояние в теле в момент потери устойчивости.

А. Ю. Ишлинский установил также, что имеет место отклонение от принципа Сен-Венана при изучении устойчивости прямоугольных в плане пластинок.

При изучении колебаний упругих канатов переменной длины возникали большие трудности, связанные с необходимостью решения дифферен-

циальных уравнений в частных производных при достаточно сложных граничных условиях. А. Ю. Ишлинский предложил интегро-дифференциальное уравнение, эквивалентное исходным уравнениям, и указал метод приближенного его решения. Предложенный метод решения задач и его модификации позволили киевским механикам решить большое количество задач по расчету подъемных канатов, предназначенных для глубоких шахт.

Интересные результаты получил А. Ю. Ишлинский, изучая взрыв в грунте и действие взрывных волн на сооружение, расположенное недалеко от места взрыва. При изучении этих вопросов он предложил оригинальную модель деформации грунта при взрыве. В ней предполагалось, что при давлениях, не превышающих некоторой характерной для данного грунта константы p_s , грунт деформируется по закону идеальной несжимаемой жидкости данной плотности ρ_0 . При давлении, равном p_s , происходит своеобразная «упаковка» грунта до плотности ρ_1 , после чего он снова деформируется как идеальная жидкость, но уже новой постоянной плотности ρ_1 . Предложенная автором модель оказалась весьма эффективной при описании распространения взрывных волн в начальной стадии, когда сжимающие напряжения достаточно велики по сравнению с пределом упругости. В рассматриваемой модели использовано предположение о том, что при динамическом деформировании закон связи между напряжениями и деформациями не зависит от скорости деформирования. Подобное предположение нашло свое экспериментальное подтверждение и используется в настоящее время многими исследователями. Оно было перенесено А. Ю. Ишлинским на условие предельного равновесия сыпучей среды и позволило ему составить замкнутую систему уравнений задачи о плоском движении песка и изучить частные случаи одномерных осесимметричных движений.

В 1952 г. А. Ю. Ишлинский в точной постановке решил задачу об остаточных напряжениях и деформациях в скрученном цилиндре конечной длины — по сути первую пространственную задачу об отыскании остаточного напряженного и деформированного состояний. Он показал, как увеличивается суммарная крутка при разрезе цилиндра, закрученного за предел упругости.

А. Ю. Ишлинский совместно с Г. П. Слепцовой решили задачу об ударе вязко-пластического стержня о жесткую преграду в следующей постановке: стержень конечной длины из вязко-пластического материала движется поступательно в направлении своей оси с определенной скоростью и в начальный момент ударяется о жесткую преграду. Задача была сведена к решению уравнения теплопроводности со своеобразными существенно нелинейными граничными условиями на вперед неизвестной подвижной границе областей стержня после удара — вязкой около преграды и жесткой около конца стержня. Они предложили эффективное приближенное решение этой задачи, состоящее в замене действительного стержня некоторым схематическим, у которого масса представляется в виде n сосредоточенных масс, расположенных в средних сечениях, соответствующих n равным по длине долям стержня. Вследствие такой замены задача свелась к последовательному решению обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимся по мере развития удара числом искомых функций — скоростей сечений, в которых размещены сосредоточенные массы. Решение задачи в данном случае было проведено с эффективным использованием быстродействующих вычислительных машин для различных значений n .

В 1954 г. А. Ю. Ишлинский изложил общую теорию пластичности с линейным упрочнением. Это было в период, когда несовершенство всех прежних попыток описания пространственного деформирования тел за пределом упругости стало очевидным вследствие тщательного анализа большого количества проведенных экспериментов. Предложенная теория соответствует линейному упрочнению материала; в случае идеальной пластичности она совпадает с теорией Прандтля—Рейсса. Она отражает такие свойства материала как увеличение границы упругости при повторном деформировании за этой границей и эффект Баушингера. Эта теория нашла свое дальнейшее развитие во многих исследованиях советских и зарубежных специалистов.

Идеи А. Ю. Ишлинского были использованы в исследованиях его учеников. Из них отметим, в частности, исследования К. Ф. Войцеховской, посвященные решению пространственной задачи устойчивости упругого тела, ограниченного цилиндрической поверхностью, с учетом деформации этой поверхности. Уравнения устойчивости, полученные на основании общих уравнений равновесия упругого тела, решены ею методами математической теории упругости. Сравнение полученных результатов с результатами теории сопротивления материалов и прикладной теории упругости показало их совпадение с высокой степенью точности.

М. Е. Темченко и А. А. Ющенко исследовали распределение касательных напряжений в связующем слое (клей, сварка, резьба) и усилий, возникающих при растяжении в двух сваренных из разных материалов брусках. Они показали, что при увеличении длины сварки касательное напряжение в ней сказывается только вблизи концов сварочного слоя, а растягивающие усилия в брусках приближаются к некоторым постоянным значениям.

М. Е. Темченко исследовала движение вязко-упругой среды, когда одна из ее границ мгновенно останавливается, показав, что по истечении промежутка времени, необходимого для трех-четырех проходов волн по слою среды, скорости всех ее точек становятся практически равными нулю.

2. Прикладная теория гироскопов. Инерциальная навигация. А. Ю. Ишлинскому принадлежит ряд основополагающих результатов, относящихся к теории гироскопических приборов и инерциальной навигации. Следует отметить проведенный им анализ геометрических погрешностей гироскопических приборов, обусловленных неполным соответствием связанных между собой кардановых подвесов, установленных на качающемся основании. Результаты этих исследований нашли широкое применение в практике проектирования ряда измерительных устройств, установленных на качающемся основании.

А. Ю. Ишлинский решил ряд актуальных проблем и задач, относящихся к важнейшим гироскопическим приборам (гиростабилизаторам, гировертикалям, гироскопам). Постановка этих проблем диктовалась самим развитием отечественного точного приборостроения. Сюда следует отнести исследование погрешностей гироскопических приборов, обусловленных упругостью элементов их конструкций; исследование вопросов амортизации гироскопов при больших ускорениях; исследование влияния вибрации основания на точность показаний приборов; анализ работы гировертикали с шаровым ротором в газодинамическом подвесе. Эти исследования А. Ю. Ишлинский проводил в тесном контакте с инженерами-разработчиками. Они способствовали существенному повышению качества отечественной гироскопической аппаратуры.

Весьма важным для развития теории и практики ряда сложных гироскопических систем является цикл исследований А. Ю. Ишлинского, посвященных теории гироскопов, гировертикалей и гироскопических компасов. Следует отметить тонко проведенный им анализ «игры сил» в подвесе чувствительного элемента гироскопа.

Полученная с помощью этого анализа специальная форма уравнений прецессионного движения учитывает широкий круг факторов, существенно влияющих на поведение рассматриваемого прибора. Эта форма уравнений нашла широкое применение в теоретических исследованиях и проектных расчетах.

Фундаментальное значение в теории гироскопического компаса имеют исследования А. Ю. Ишлинского, посвященные теории пространственного гироскопического компаса. Полученные им уравнения возмущенного движения оказались весьма удобными для исследования любых гироскопических компасов, включая и современные системы курсоуказания. Исследования А. Ю. Ишлинского по теории пространственного гироскопического компаса, существенно уточняющие и развивающие классические работы М. Шулера, стали настольным руководством для инженеров, разрабатывающих перспективные системы курсоуказания.

А. Ю. Ишлинский внес значительный вклад в развитие теории систем инерциальной навигации, предназначенных для автономного (без внешней

информации) определения координат и скорости движущегося объекта и использующих показания гироскопов, ньютометров и счетно-решающих устройств. А. Ю. Ишлинский впервые построил строгую теорию инерциальной системы полуаналитического типа, обладающей свободой в азимуте, высокой точностью и стабильностью показаний в условиях подвижного и интенсивно маневрирующего основания.

Следует отметить важный цикл исследований А. Ю. Ишлинского, относящийся к теории инерциальных систем гирокомпасного типа, основывающихся на интегральных алгоритмах управления, допускающих эффективное применение электронных вычислительных машин к современным средствам оптимального управления и коррекции.

Отметим еще цикл исследований А. Ю. Ишлинского по теории инерциального управления движущимися объектами. Он математически обосновал принципы построения ракетных инерциальных систем управления, особенностью которых является работа на небольшом промежутке времени. Результатом этих исследований явилось простое и вместе с тем достаточно точное приборное решение для случая, когда движение ракеты регулируется так, что его действительный закон близок к программному. Эти исследования способствовали формированию теории инерциальных систем наведения, которые в Институте математики АН УССР получили дальнейшее развитие в работах Д. Г. Кореневского и Ю. А. Карпачева.

Основополагающие исследования А. Ю. Ишлинского по механике твердого тела и теории гироскопов продолжают и развиваются его учениками и последователями, работающими в Институте математики АН УССР в отделе механики и процессов управления и в отделе динамики и устойчивости многомерных систем (В. Н. Кошлякским, О. Ф. Бойчуком, В. П. Василенко, В. Н. Калиновичем, С. М. Онищенко, В. А. Стороженко, М. Е. Темченко и др.).

Значительная часть работ В. Н. Кошлякова посвящена анализу точности гироскопических компасов различных типов, исследованию их качественных свойств, обоснованию рациональных схемных решений систем курсоуказания и перспектив их развития в нашей стране.

Он дал обобщение математической модели уравнений возмущенного движения, полученной А. Ю. Ишлинским применительно к пространственному гироскопическому компасу, на случаи других гирокомпасных систем, не обладающих свойствами пространственного гирокомпаса. В свете аналогии с теорией упругих вращающихся систем исследовал устойчивость движения двухроторного маятникового гирокомпаса на подвижном основании.

Ряд исследований В. Н. Кошлякова посвящен изучению корректируемых гирокомпасов и гироскопических компасов.

Им проанализирована точность и устойчивость движения этих приборов в случае маневрирования корабля. Этот анализ свидетельствует о сохранении значительного запаса устойчивости, присущей корректируемым системам курсоуказания при маневрировании основания с весьма большими скоростями, что служит предпосылкой перспективности таких систем в навигационном обеспечении морских судов.

В. Н. Кошляков применил аппарат параметров Родрига—Гамильтона и Кэйли—Клейна к основной задаче инерциальной навигации и построению некоторого класса точных решений невозмущаемой гироскопической системы, а также к вопросам динамики тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки.

Развитию теории и практики систем курсоуказания в Институте математики АН УССР посвящены исследования В. П. Василенко, В. Ф. Грималюка, В. Н. Калиновича, В. В. Новицкого, С. М. Онищенко, А. Н. Полищук, С. П. Сосницкого, М. Е. Темченко и А. П. Янишевского.

В работах В. П. Василенко и А. Н. Полищук построена строгая математическая модель движения однороторного корректируемого гирокомпаса; исследованы точность и устойчивость движения корректируемых гирокомпасов и гироазимуты; исследованы колебания и устойчивость гироскопической платформы, ориентированной в географическом меридиане.

В. П. Василенко и М. Е. Темченко провели детальное исследование однороторных короткопериодных гирокомпасов, применяемых в маркшейдерском деле.

В. Н. Қалинович получил условия невозмущаемости гиригоризонт-компаса при его движении на переменной высоте; построил схему демпфирования собственных колебаний двухроторных гироскопических компасов с использованием показаний ньютонометров.

С. М. Онищенко исследовал устойчивость гироскопических систем маятникового типа на конечном интервале времени. С. П. Сосницкий получил условия параметрического резонанса гироскопа при сложном периодическом маневрировании основания. А. П. Янишевский исследовал влияние «сухого» трения в подвесе гироскопов для схемы двухроторного маятникового гироскопа в случае маневрирования корабля.

Основополагающие результаты, полученные А. Ю. Ишлинским в области теории инерциальной навигации, интенсивно развивались и развиваются в Институте математики АН УССР. Здесь следует отметить данное им геометрическое доказательство устойчивости основной задачи инерциальной навигации. Установленный геометрическим путем факт постоянства конечного поворота, осуществляющего переход сопровождающего трехгранника из невозмущенного положения в возмущенное, А. Ю. Ишлинский в соавторстве с О. Ф. Бойчуком и В. А. Стороженко доказал также и аналитически. Это дало возможность завершить исследование устойчивости решений кинематических уравнений инерциальной навигации и позволило выписать общее решение этих уравнений.

Отметим также цикл работ О. Ф. Бойчука. В них предложен общий подход к проблеме невозмущаемости гиримаятниковых платформ; построен класс инерциальных систем, использующих невозмущаемые гиримаятниковые и гириакселерометрические платформы; решен ряд задач оптимального демпфирования инерциальных систем; с использованием процедур Қалмана и Винера—Хопфа найдены законы оптимального управления в задачах демпфирования колебаний инерциальной системы при наличии «белого шума» в самой системе и в измерителях.

В. Н. Қалинович получил обобщенные уравнения, описывающие поведение платформенных и бесплатформенных инерциальных систем, предложил новые варианты схем инерциальной навигации, использующих в качестве гиристабилизированной платформы пространственный гироскопас, рассмотрел их поведение на переменной высоте, провел анализ их ошибок. Он предложил геометрический метод определения погрешностей в решении основной задачи инерциальной навигации.

Аппарат параметров Родрига—Гамильтона и Қэйли—Қлейна применен в исследованиях В. А. Стороженко и М. Е. Темченко, касающихся инерциальной навигации в околополюсных районах. В. А. Стороженко исследовал вопросы устойчивости и демпфирования суточных колебаний инерциальных навигационных систем путем использования параметров Родрига—Гамильтона. Он выполнил ряд работ по изучению погрешностей систем инерциальной навигации, вызванных случайными возмущениями показаний ньютонометров и случайными возмущающими моментами.

Отметим выполненный С. М. Онищенко комплекс исследований по применению различных кинематических параметров в уравнениях бесплатформенных инерциальных систем. Он показал, что использование непозиционной системы остаточных классов в навигационном комплексе в пространстве параметров Қэйли—Қлейна имеет определенные преимущества при построении вычислительных алгоритмов.

М. Е. Темченко решила задачу об автономном определении местоположения объекта посредством системы инерциальной навигации, установленной на произвольно перемещающемся объекте с учетом несферичности Земли. Она исследовала влияние случайных уходов горизонтирующего гироскопа на поведение системы инерциальной навигации с принудительным вращением ее элементов; изучила погрешности работы однокомпонентной системы инерциальной навигации в условиях нерегулярной качки объекта

с учетом инерционности элементов и вязкого трения в оси подвеса платформы.

3. Динамика твердого тела. На протяжении многих лет в Институте математики АН УССР проводятся исследования поведения абсолютно твердого тела, подчиненного тем или иным связям. Подобные задачи возникают обычно из потребностей практики, многие из них приобретают затем вполне самостоятельный научный интерес. Примером этого служит задача о движении твердого тела, подвешенного на струне. История ее возникновения относится еще к 40-м годам, когда в Киеве под руководством М. А. Лаврентьева осуществлялась разработка проблемы кумуляции. Для ее решения было крайне необходимо, в частности, осуществить быстрое вращение тел в стендовых условиях. Эта задача была решена в Институте строительной механики АН УССР С. В. Малашенко посредством применения струнного подвеса. В дальнейшем появились новые возможности использования этого подвеса и как следствие возникла потребность всестороннего теоретического исследования движения твердого тела, подвешенного на струне. Такие исследования начались в 50-х годах в Институте математики АН УССР под руководством и при непосредственном участии А. Ю. Ишлинского. В частности, при исследовании стационарного движения осесимметричного тела им было обнаружено существование точек бифуркации, т.е. тех значений угловой скорости вращения, при которых от основной (вертикальной) формы стационарного движения ответвляются новые формы, при которых ось симметрии тела уже не является вертикальной. Как показали эксперименты, проведенные в Институте механики АН УССР под руководством С. В. Малашенко, новые формы оказались устойчивыми наряду с вертикальной формой стационарного движения. Устойчивость одной из неvertикальных форм стационарного движения теоретически доказана М. Е. Темченко.

Большой цикл работ был посвящен изучению движения твердых тел с жидким наполнением. В частности, А. Ю. Ишлинский и М. Е. Темченко исследовали устойчивость движения волчка и вращающегося на струне осесимметричного твердого тела с эллипсоидальной полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью. Ряд интересных результатов при изучении устойчивости движения вращающегося на струне осесимметричного твердого тела с цилиндрической полостью, целиком наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, методами функционального анализа получен М. Л. Горбачуком.

В последние годы интерес к задаче движения твердого тела на струнном подвесе возрос в связи с предложенной С. В. Малашенко идеей использования этого подвеса для динамической балансировки быстровращающихся твердых тел, и в особенности изделий, уникальных по весу и габаритам, балансировка которых обычными способами затруднена. В связи с этим под руководством и при участии А. Ю. Ишлинского были проведены исследования как теоретические, так и экспериментальные, направленные на обоснование идеи самобалансирования тел на струнном подвесе. Теоретическую часть этих исследований осуществляли в Институте математики АН УССР А. Ю. Ишлинский, В. А. Стороженко, М. Е. Темченко экспериментальную — в Институте механики АН УССР С. В. Малашенко и П. Г. Шишкин. Они показали, что при вращении на струне тела произвольной конфигурации с достаточно большой угловой скоростью возможна такая форма стационарного движения, при которой одна из его главных центральных осей инерции весьма близка к неподвижной вертикали. Это дает возможность с высокой точностью определять положение главной центральной оси инерции в теле.

А. Ю. Ишлинский, В. А. Стороженко и М. Е. Темченко изучили стационарные движения осесимметричного твердого тела, точка крепления которого к струне не находится на оси симметрии. Они исследовали устойчивость этих стационарных движений, изучили случай, когда связь допускает сжимающие усилия. Тогда вместо струны следует рассматривать невесомый недеформируемый стержень. Они обнаружили одну из интересных форм стационарного движения, при которой ось симметрии тела вращается в горизонте, но при этом не находится в вертикаль-

ной плоскости, содержащей струну, а составляет с ней некоторый постоянный угол (эта форма движения была получена и экспериментально С. В. Малашенко и П. Г. Шишкиным). Показали, что для твердого тела произвольной формы, подвешенного на струне и пребывающего в стационарном движении, линия струны проходит через центр масс тела только в том случае, когда одна из его главных центральных осей инерции вертикальна. Это привело к идее экспериментального определения направления главных центральных осей инерции в теле произвольной формы. Разработка этой идеи проводится в настоящее время в Институте математики АН УССР.

В последнее время в Институте математики АН УССР изучалось поведение маятника, представляющего собой осесимметричное твердое тело с неподвижной точкой, расположенной на оси симметрии. Оказалось, что колебания такого маятника при его произвольном первоначальном отклонении постепенно становятся плоско-параллельными, причем в плоскости колебаний находится одна из главных центральных осей инерции маятника, перпендикулярная оси симметрии. Это явление было экспериментально подтверждено П. Г. Шишкиным при наблюдении колебаний маятника, опора которого выполнена в виде шарика, перекатывающегося по некоторой сферической поверхности. В этом случае связь, наложенная на движение тела, является неголомомной. Описанное явление было теоретически изучено А. Ю. Ишлинским, В. П. Василенко, В. А. Стороженко, М. Е. Темченко, П. Г. Шишкиным. В настоящее время ведутся работы по практическому использованию данного механического явления, в частности для определения положения главных центральных осей инерции в теле произвольной формы.