УДК 517+519.2

В. В. Булдыгин, А. Б. Харазишвили

О борелевских мерах в несепарабельных метрических пространствах

В настоящей статье будут даны некоторые применения следующей теоремы, различные варианты и аранжировки которой ранее встречались в литературе (см., напр., [1, 2]). (Напомним, что кардинальное число α называется измеримым в широком смысле, если на множестве всех частей от α можно определить вероятностную меру, принимающую значения, равные нулю, на одноэлементных подмножествах в α. Кардинальное число β называется измеримым в узком смысле, если на множестве всех частей от β можно определить двузначную вероятностную меру, принимающую значения, равные нулю, на одноэлементных подмножествах в β).

Теорема. *Пусть (E, ρ) — метрическое пространство, топологический вес которого не измерим в широком смысле. Пусть μ-произвольная σ-конечная мера, определенная на борелевском классе пространства E. Тогда найдется замкнутое сепарабельное подпространство $E(\mu)$ пространства E, такое, что*

$$\mu(E \setminus E(\mu)) = 0.$$

Доказательство этой теоремы опирается на одну простую лемму из теории метрических пространств.

Лемма. *Пусть (E, ρ) — метрическое пространство; I — множество индексов, линейно упорядоченное некоторым соотношением порядка $\leqslant$; $(A_i)_{i\in I}$ — семейство открытых множеств в E и пусть для всякого индекса $i \in I$ 1) $B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} A_j$, 2) $C_i \subset B_i \,\&\, C_i$ замкнуто в E.* Тогда объединение $\bigcup\limits_{i\in I} C_i$ есть множество типа F_σ в пространстве E.

Доказательство. Для каждого индекса $i \in I$ и для каждого натурального числа $n \geqslant 1$ положим

$$C_i^n = \left\{z : z \in C_i \,\&\, \rho(z, E \setminus A_i) \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Очевидно, что

$$\bigcup_{n\geqslant 1} C_i^n = C_i,$$

причем всякое множество C_i^n замкнутое в E. Далее, если $i > j$, $x \in C_i^n$ и $y \in C_j^n$, то $\rho(x, y) \geqslant 1/n$. Следовательно, $\rho(C_i^n, C_j^n) \geqslant 1/n$ при любых отличных друг от друга индексах $i \in I$ и $j \in I$ (именно здесь используется линейная упорядоченность множества I). Таким образом, объединение $\bigcup\limits_{i\in I} C_i^n$ есть замкнутое множество в пространстве E, а объединение

$$\bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{n\geqslant 1} \left(\bigcup_{i\in I} C_i^n\right)$$

есть множество типа F_σ в этом пространстве. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть (E, ρ) — метрическое пространство, топологический вес которого не измерим в широком смысле, а μ — некоторая σ-конечная борелевская мера в этом пространстве. Без умаления общности можно считать, что мера μ — вероятностная. Зафиксируем натуральное число $k \geqslant 1$ и рассмотрим покрытие $(X_i^k)_{i \in I}$ пространства E, образованное открытыми шарами, имеющими радиусы $1/k$. Мы можем считать также, что мощность множества I не превосходит топологического веса пространства E (следовательно, не измерима в широком смысле) и само множество I вполне упорядочено некоторым соотношением порядка $\leqslant$. Далее, для всякого индекса $i \in I$ положим

$$Y_i^k = X_i^k \setminus \bigcup_{j<i} X_j^k.$$

Совершенно ясно, что семейство $(Y_i^k)_{i \in I}$ дизъюнктно и тоже служит покрытием пространства E. Кроме того, легко сообразить, что каждое множество Y_i^k есть множество типа F_σ в пространстве E, т. е.

$$Y_i^k = \bigcup_{m \in N} Y_{im}^k,$$

где все Y_{im}^k — замкнутые подмножества в E. Поскольку мера μ — вероятностная, то множество всех тех индексов $i \in I$, для которых $\mu(Y_i^k) > 0$, не более чем счетно. Обозначим это множество через $T(k)$ и положим $J(k) = I \setminus T(k)$.

Утверждаем, что

$$\mu\left(\bigcup_{i \in J(k)} Y_i^k\right) = 0.$$

В самом деле, допустим противное:

$$\mu\left(\bigcup_{i \in J(k)} Y_i^k\right) > 0.$$

Для всякой части P множества $J(k)$ рассмотрим объединение $\bigcup_{i \in P} Y_i^k$. Это объединение можно записать так:

$$\bigcup_{i \in P} Y_i^k = \bigcup_{m \in N} \left(\bigcup_{i \in P} Y_{im}^k\right).$$

В силу леммы объединение $\bigcup_{i \in P} Y_{im}^k$ есть множество типа F_σ в пространстве E. Следовательно, множеством типа F_σ будет и объединение $\bigcup_{i \in P} Y_i^k$. Полагая $\lambda(P) = \mu\left(\bigcup_{i \in P} Y_i^k\right)$, на множестве всех частей от $J(k)$ определим невырожденную конечную меру λ, принимающую значения, равные нулю, на одноэлементных подмножествах в $J(k)$. Последнее, однако, противоречит тому, что мощность множества $J(k)$ не измерима в широком смысле. Полученное противоречие показывает, что

$$\mu\left(\bigcup_{i \in J(k)} Y_i^k\right) = 0$$

и что мера μ целиком сосредоточена на множестве

$$X(k) = \bigcup_{i \in T(k)} X_i^k \supset \bigcup_{i \in T(k)} Y_i^k.$$

Очевидно, что пересечение

$$\bigcap_{k \geqslant 1} X(k)$$

представляет собой сепарабельное подпространство пространства E, причем мера μ сосредоточена и на этом подпространстве. Следовательно, в качестве искомого множества $E(\mu)$ можно взять замыкание пересечения $\bigcap_{k\geqslant 1} X(k)$. Доказательство теоремы завершено.

Замечание 1. Приведенное доказательство имеет то преимущество, что в процессе его не используется глубокая теорема Стоуна о паракомпактности метрических пространств.

Замечание 2. Предположение, что всякое кардинальное число не измеримо в широком смысле, не противоречит современной аксиоматике теории множеств. Это следует из теоремы Улама, утверждающей, что каждое кардинальное число, строго меньшее первого несчетного недостижимого кардинала, не измеримо в широком смысле, и из результата Геделя о совместимости обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств. Фактически результат Геделя используется для установления того факта, что утверждение «всякое несчетное кардинальное число достижимо» не противоречит современной аксиоматике теории множеств.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекают следующие два предложения.

Предложение 1. *Пусть (E, ρ) — полное метрическое пространство, топологический вес которого не измерим в широком смысле, а μ-произвольная σ-конечная борелевская мера в этом пространстве. Тогда мера μ сосредоточена на некотором счетном объединении компактов в E.*

Предложение 2. *Пусть (E, ρ) — метрическое пространство, топологический вес которого не измерим в широком смысле, а μ-любая σ-конечная борелевская мера в E, принимающая значения, равные нулю, на одноточечных подмножествах в E. Тогда существует разбиение $\{A, B\}$ пространства E на два множества A и B, такое, что множество A является множеством μ-меры нуль, а множество B является множеством первой категории в пространстве E.*

Пусть $(G\cdot)$ — топологическая группа, μ — некоторая мера, определенная на борелевском классе $\beta(G)$ этой группы, g — некоторый элемент группы G. Говорят, что мера μ квазиинвариантная относительно переноса g или g-квазиинвариантная), если мера $\mu(g)$, задаваемая с помощью равенства $\mu(g)(Z) = \mu(gZ)$, $Z \in \beta(G)$, эквивалентна мере μ (другими словами, эти две меры имеют один и тот же класс нуль-множеств).

Далее, пусть Γ — какое-либо подмножество группы G. Говорят, что мера μ — квазиинвариантная относительно множества Γ (или Γ-квазиинвариантная), если эта мера квазиинвариантная относительно любого переноса $g \in \Gamma$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть $(G,\cdot)$ — метризуемая топологическая группа, топологический вес которой не измерим в широком смысле. Если в G существует невырожденная σ-конечная борелевская мера, квазиинвариантная относительно некоторого всюду плотного множества переносов, то группа G — сепарабельная.*

Это предложение без труда выводится с помощью теоремы 1 и с использованием того простого факта, что подгруппа группы G, порожденная сепарабельным множеством, также сепарабельная.

Замечание 3. Для некоторых частных видов метризуемых топологических групп в формулировке предложения 3 можно избавиться от ограничения на топологический вес группы G (по этому поводу см. [3], где квазиинвариантные меры исследуются в связи с понятием абсолютной пренебрежимости).

Следующее предложение в определенном смысле распространяет известную теорему Прохорова на случай полных несепарабельных метрических пространств.

Предложение 4. *Пусть (E, ρ) — полное метрическое пространство, топологический вес которого не измерим в широком смысле, и $(\mu_i)_{i\in I}$ — счетное семейство вероятностных борелевских мер на этом пространстве.*

Тогда нижеприведенные два соотношения эквивалентны: 1) семейство $(\mu_i)_{i\in I}$ *относительно секвенциально компактно, т. е. любая последовательность мер из этого семейства содержит слабо сходящуюся подпоследовательность; 2) семейство* $(\mu_i)_{i\in I}$ *равномерно плотно, т. е. для любого строго положительного числа* ε *существует компактное множество* $K(\varepsilon)\subset E$, *такое, что* $\sup\limits_{i\in I}\mu_i(E\setminus K(\varepsilon))<\varepsilon$.

Доказательство этого предложения с помощью теоремы 1 фактически сводится к доказательству теоремы Прохорова.

Как уже отмечалось выше (см. замечание 2), утверждение, что всякое несчетное кардинальное число достижимо, не противоречит современной аксиоматике теории множеств. В частности, непротиворечива следующая гипотеза:

(*) все несчетные кардинальные числа, не превосходящие мощности континуума, достижимы.

Особо отметим, что эта гипотеза гораздо слабее, чем хорошо известная гипотеза континуума.

Выделение гипотезы (*) позволяет вывести из теоремы ряд утверждений относительно борелевских вероятностных мер в некоторых классических пространствах последовательностей.

Пусть M — класс всех таких вероятностных мер μ на прямой R, что μ абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры и ее плотность φ_μ непрерывна, симметрична и логарифмически выпукла.

Далее, пусть R^N — пространство всех вещественных последовательностей, наделенное тихоновской топологией. Будем считать, что вероятностная мера μ на $(R^N, \mathfrak{B}(R^N))$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, если существует счетное семейство мер $(\mu_k)_{k\in N}$, принадлежащих классу M, такое, что

$$\mu=\prod_{k=0}^{\infty}\mu_k.$$

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{A}$ бесконечных вещественных матриц $A=(a_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, таких, что $a_{ij}=0$ при $j>i$ и для всякого $j\geqslant 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{i\to\infty}a_{ij}=0$. Если на $(R^N, \mathfrak{B}(R^N))$ задана вероятностная мера μ, то линейное отображение $A: R^N\to R^N$, определяемое соотношением

$$(Ax)_k=\sum_{i=0}^{k}a_{ki}x_i,$$

порождает вероятностную меру μ_A:

$$\mu_A(X)=\mu(A^{-1}(X)),\quad X\in\mathfrak{B}(R^N).$$

Положим $\mathfrak{M}_0=\{\mu_A:\mu\in\mathfrak{M}\ \&\ A\in\mathfrak{A}\}$.

С точки зрения теории вероятностей, для которой приводимые ниже следствия теоремы представляют определенный интерес, каждая мера из класса $\mathfrak{M}_0$ является распределением в R^N последовательности случайных величин, полученной треугольным преобразованием $A\in\mathfrak{A}$ из последовательности независимых случайных величин, распределения которых принадлежат классу M. Класс мер $\mathfrak{M}_0$ достаточно богат. Он содержит, например, все центрированные гауссовские меры на $(R^N, \mathfrak{B}(R^N))$, ковариационные матрицы которых таковы, что элементы главной диагонали стремятся к нулю.

Пусть, как обычно, l_∞ — пространство всех ограниченных вещественных последовательностей, а c_0 — пространство всех вещественных сходящихся к нулю последовательностей. Эти пространства мы наделяем нормами равномерной сходимости. Очевидно, что пространство l_∞ несепарабельно, но его топологический вес не превосходит мощности континуума. В дальнейшем будем пользоваться следующим обозначением: $p(x)=\sup\limits_{n\in N}|x_n|$ при $x=(x_n)_{n\in N}\in R^N$.

П р е д л о ж е н и е 5. *Пусть верна гипотеза* (*) *и мера* $\mu \in \mathfrak{M}_0$ *такова, что* $\mu(l_\infty) = 1$. *Тогда мера* μ *продолжается до борелевской меры на* l_∞ *в том и только в том случае, если* $\mu(c_0) = 1$.

Коротко наметим доказательство сформулированного предложения.

Если $\mu(c_0) = 1$, то μ — борелевская мера на c_0 (а следовательно, и на l_∞), поскольку в силу сепарабельности пространства c_0 класс борелевских множеств в c_0 совпадает с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами. Таким образом, обоснование этого утверждения не связано с особыми трудностями. Больший интерес представляет обратное утверждение.

Пусть $\mu(l_\infty) = 1$ и μ продолжается до борелевской меры на l_∞. Тогда, согласно теореме, в пространстве l_∞ для меры μ существует сепарабельный носитель. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $x_\varepsilon \in R^N$, что $\mu\{x \in R^N,\ p(x - x_\varepsilon) < \varepsilon\} > 0$.

Известно [4], что для мер из класса $\mathfrak{M}_0$ справедливо неравенство

$$\mu\{x \in R^N : p(x) < \varepsilon\} \geqslant \mu\{x \in R^N : p(x - x_\varepsilon) < \varepsilon\}.$$

Поэтому, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, будем иметь

$$\mu\{x \in R^N : p(x) < \varepsilon\} > 0.$$

Но последнее условие достаточно для того, чтобы выполнялось равенство $\mu(c_0) = 1$[4], тем самым предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 6. *Пусть справедлива гипотеза* (*) *и мера* $\mu \in \mathfrak{M}_0$ *такова, что* $\mu(l_\infty) = 1$, *а* $\mu(c_0) = 0$. *Тогда мера* μ *не может быть продолжена до борелевской меры на* l_∞.

Простейшим примером меры μ, удовлетворяющей условиям предложения 6, является гауссовская мера на R^N, ковариационный оператор которой диагонален, а для его элементов b_{ii} выполняются следующие соотношения:

$$(\exists\, \varepsilon_0 > 0)\left(\sum_i \exp\left\{-\frac{\varepsilon_0}{b_{ii}}\right\} < \infty\right),$$

$$(\exists\, \varepsilon_1 > 0)\left(\sum_i \exp\left\{-\frac{\varepsilon_1}{b_{ii}}\right\} = \infty\right).$$

Более содержательны примеры, вытекающие из соответствующих критериев работы [4].

Последние два предложения показывают, как чисто теоретико-множественная гипотеза (*) связывает абстрактную теорему 1 с проявлениями конкретных осцилляционных свойств широкого класса распределений в пространствах последовательностей. В качестве следствий получаются довольно неожиданные связи между борелевской структурой распределений из класса $\mathfrak{M}_0$ и топологической структурой их носителей.

1. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М. : Наука, 1977.— 352 с.
2. *Боровков А. А.* Сходимость мер и случайных процессов.— Успехи мат. наук, 1976, 31 № 2, с. 3—68.
3. *Харазишвили А. Б.* Квазиинвариантные меры в топологических группах.— Сообщения АН ГССР, 1982, 108, № 2, с. 277—280.
4. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 239 с.

Институт математики АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию
06.07.82