УДК 517.944

В. И. Горбайчук

Теорема Фату о граничном поведении производных в классе бигармонических функций

Пусть $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ — 2π-периодическая функция, заданная на единичной окружности. Тогда решение задачи Дирихле в круге с этой граничной функцией дает интеграл Пуассона:

$$f(r, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P(r, t - x)\, dt, \tag{1}$$

где $P(r, t) = \frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}$, $0 \leqslant r < 1$, — ядро Пуассона.

Граничные свойства интеграла (1) (и его производных) подробно изучены Фату [1]. В частности, Фату доказал справедливость следующих утверждений (разные аспекты этих результатов с той или иной степенью общности изложены, например, в работах [2—9]):

а) если $f'(x_0)$ существует и конечна, то

$$\lim_{r\exp(ix) \widehat{\to} \exp(ix_0)} \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = f'(x_0)$$

(здесь символ $r\exp(ix) \widehat{\to} \exp(ix_0)$ обозначает, что точка re^{ix} стремится к точке $\exp(ix_0)$ по некасательным к окружности $r = 1$ путям);

б) если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную первую производную Шварца $D_1 f(x_0)$ (см., напр., [10]), то существует радиальный предел

$$\lim_{r\to 1} \frac{\partial f(r, x)}{\partial x} = D_1 f(x_0);$$

в) Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную вторую производную Шварца $D^2 f(x_0)$, то

$$\lim_{r\to 1} \frac{\partial^2 f(r, x)}{\partial x^2} = D^2 f(x_0).$$

В связи с этими результатами возникают вопросы:

1) если $D_1 f(x_0)$ существует и конечна, то что можно сказать о пределе

$$\lim_{r\exp(ix) \widehat{\to} \exp(ix_0)} \frac{\partial f(r, x)}{\partial x}? \tag{2}$$

2) если $D^2 f(x_0)$ существует и конечна, то что можно сказать о пределе

$$\lim_{r\exp(ix) \widehat{\to} \exp(ix_0)} \frac{\partial^2 f(r, x)}{\partial x^2}? \tag{3}$$

В работе [11] доказано, что существуют 2π-периодические функции $f(x)$, для которых в классе гармонических в круге функций указанные в вопросах пределы не существуют.

В настоящей работе даны ответы (также отрицательные) на поставленные вопросы для функций $u = f(r, x)$, являющихся классическими решениями бигармонической краевой задачи Дирихле для уравнения

$$\Delta^2 u = 0 \tag{4}$$

с граничными условиями

$$u|_{\Gamma}=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0, \tag{5}$$

где Γ — единичная окружность $r=1$.

Известно [12], что для непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ решение $u=f(r, x)$ краевой задачи (4)—(5) дается так называемым бигармоническим интегралом Пуассона

$$f(r, x)=\frac{(1-r^2)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1-r\cos(t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^2}\,dt. \tag{6}$$

Класс бигармонических функций шире класса гармонических функций, а второе из условий (5) выделяет из всего класса бигармонических функций один важный его подкласс, который и рассматривается здесь как решение краевой задачи (4)—(5). С другой стороны, как показывает доказанная ниже лемма, из результатов работы [11] и теоремы Альманзи о представлении бигармонических функций через гармонические не следует справедливость результатов [11] для решений краевой задачи (4)—(5).

Лемма. *Если область D с границей Γ ограничена, то множество всех решений краевой задачи (4)—(5) не содержит других гармонических функций, кроме констант.*

Доказательство. Если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в области D функции, то по формуле Грина [13] имеем

$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy+\iint_D u\Delta v\,dxdy+\int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds=0.$$

Считая, что $u(x, y)$ — гармоническая в D функция и $u\equiv v$, и учитывая второе из условий (5), получим

$$\iint_D(\operatorname{grad} u)^2\,dxdy=0.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{grad} u\equiv 0$ в D, т. е. $u=\text{const}$ в области D. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $f(r, x)$ — решение в единичном круге краевой задачи (4)—(5). Существует непрерывная 2π-периодическая функция $f(t)$, для которой $D_1 f(x_0)=0$, однако предел (2) не существует.*

Доказательство. Используя (6), получаем

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x}=r\,\frac{(1-r^2)^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^2}\,dt+$$

$$+\frac{r}{\pi}(1-r^2)^3\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^3}\,dt\overset{\mathrm{d}}{=}I_1+I_2. \tag{7}$$

Полагаем

$$f(t)=\begin{cases}\sqrt{-t}, & \text{если } -\pi\leqslant t\leqslant 0,\\ \sqrt{t}, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant\pi\end{cases} \tag{8}$$

и продолжаем $f(t)$ периодически на всю ось. Тогда

$$I_1=\frac{r}{2\pi}(1-r^2)^2\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(t-x)}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^2}\,dt=$$

$$= c(1-r)^2\left(\int\limits_{-\pi}^{0} \frac{\sqrt{-t}\sin(t-x)\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sqrt{t}\sin(t-x)\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^2}\right),$$

где обозначено $c = r(1+r)^2/2\pi$. После подходящих замен переменных интегрирования и простых преобразований находим

$$I_1 = c(1-r)^2\left(-\int\limits_{x}^{\pi+x} \frac{\sqrt{t-x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{-x}^{\pi-x} \frac{\sqrt{t+x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2}\right) = c(1-r)^2\left(\int\limits_{-x}^{x} \frac{\sqrt{t+x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} + \right.$$

$$+ \int\limits_{x}^{\pi-x} \frac{(\sqrt{t+x}-\sqrt{t-x})\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} -$$

$$\left. - \int\limits_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sqrt{t-x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2}\right) \overset{\mathrm{df}}{=} c(1-r)^2(J_1+J_2+J_3). \qquad (9)$$

Будем считать некасательные приближения точки (r, x) круга к точке $(1, 0)$ единичной окружности выбранными таким образом, что

$$\sin x = 1 - r, \quad 0 \leqslant x < \pi/4. \qquad (10)$$

Тогда

$$J_1 = \int\limits_{-x}^{x} \frac{\sqrt{t+x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} = \int\limits_{0}^{x} \frac{(\sqrt{t+x}-\sqrt{t-x})\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} \geqslant 0,$$

$$J_3 = -\int\limits_{\pi-x}^{\pi+x} \frac{\sqrt{t-x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} = -\int\limits_{-x}^{x} \frac{\sqrt{t+\pi-x}\sin(\pi+t)\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2} \geqslant 0.$$

Для интеграла J_2, учитывая (10), получаем последовательными преобразованиями оценки

$$J_2 = \int\limits_{x}^{\pi-x} \frac{(\sqrt{t+x}-\sqrt{t-x})\sin t}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2}\,dt \geqslant \int\limits_{x}^{2x} \frac{(\sqrt{t+x}-\sqrt{t-x})\sin t}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^2}\,dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(\sqrt{3x}-\sqrt{x})\,x\sin x}{[(1-r)^2+4r\sin^2 x]^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}-1}{25}\,\frac{(\sin x)^{\frac{5}{2}}}{(1-r)^4} = \frac{\sqrt{3}-1}{25}\,\frac{1}{(1-r)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (11)$$

Таким образом, из (11), неотрицательности значений I_1 и I_3 на пути, определяемом условием (10), и соотношения (9) следует, что при $0 < r < 1$ величина I_1 в (7) положительна на выбранном пути.

Рассмотрим I_2 на линии (10) при $f(t)$, определяемой равенством (8). Имеем

$$I_2 = c_1(1-r)^3\left(\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\sqrt{-t}\sin(t-x)\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^3}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sqrt{t}\sin(t-x)\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^3}\right)=c_1(1-r)^3\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-x}^{x}\frac{\sqrt{t+x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^3}+\int\limits_{x}^{\pi-x}\frac{(\sqrt{t+x}-\sqrt{t-x})\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^3}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\pi-x}^{\pi+x}\frac{\sqrt{t-x}\sin t\,dt}{\left[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right]^3}\right)=c_1(1-r)^3(J_1'+J_2'+J_3'). \tag{12}$$

Аналогично случаю интегралов I_1 и I_3 доказываем, что $I_1' \geqslant 0$ и $I_3' \geqslant \geqslant 0$ в точках кривой (10). Используя метод оценки I_2' в (11), находим

$$J_3' \geqslant \int\limits_{x}^{2x}\frac{(\sqrt{3x}-\sqrt{x})\sin x}{[(1-r)^2+4r\sin^2 x]^3}\,dt \geqslant \frac{\sqrt{3}-1}{125}\,\frac{1}{(1-r)^{7/2}}. \tag{13}$$

Соотношения (12) и (13) показывают, что $I_2 > \frac{C}{\sqrt{1-r}}$, где $C>0$ — некоторая постоянная, не зависящая от r. Отсюда следует, что для функции (8) не существует конечного некасательного предела (2) при приближении точки (r, x) к $(1, 0)$ по кривой (10). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $f(r, x)$ — решение краевой задачи* (4), (5) *в единичном круге. Существует 2π-периодическая функция $f(t)$, для которой $D^2 f(x_0) = 0$, однако предел* (3) *не существует.*

Доказательство. Из (7) дифференцированием по параметру x находим

$$\frac{\partial^2 f(r,x)}{\partial x^2}=\frac{r(1-r^2)^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f(t)\frac{4r-2r\cos^2(t-x)-(1+r^2)\cos(t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^3}\,dt+$$

$$+\frac{r(1-r^2)^3}{\pi}\int\limits^{2\pi}f(t)\frac{6r-4r\cos^2(t-x)-(1+r^2)\cos(t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^4}\,dt. \tag{14}$$

Полагаем, как и в [11], что $x_0 = \pi/2$, $r\exp(ix) \to \exp(ix_0)$ по пути, определяемом соотношением

$$\cos x = 1 - r, \quad 0 \leqslant x < \pi/2. \tag{15}$$

В [11] установлено, что при сделанном выборе пути перехода к некасательному (и нерадиальному) пределу существует $r_0 \in (0, 1)$, такое, что в промежутке $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$ выполняется неравенство

$$T_1(r, t, x) = 4r - 2r\cos^2(t-x) - (1+r^2)\cos(t-x) \geqslant$$

$$\geqslant -4r\cos t\cos x\sin t\sin x. \tag{16}$$

Тогда при $\cos x = 1 - r$ и $r_0' \leqslant r < 1$ имеем

$$T_2(r, t-x) \overset{\mathrm{df}}{=} 6r - 4r\cos^2(t-x) - (1+r^2)\cos(t-x) =$$
$$= T_1(r, t-x) + 2r\sin^2(t-x). \tag{17}$$

Используя (16), аналогично доказательству соотношения (7) работы [11] находим

$$(1-r)^2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{T_1(r, t-x)\,dt}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^3} \geqslant 4r(1-r)^2 \times$$
$$\times \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{(-\cos t)\sin t\cos x\sin x dt}{\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^3} \geqslant 4r(1-r)^2\sin x\cos x \times$$
$$\times \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2+(1-r)} \frac{(-\cos t)\sin t dt}{\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t-x}{2}\right]^3}.$$

По предположению выбора пути уравнением $\cos x = 1 - r$ считаем в предельном переходе, что $1 - r \to 0$, а потому существует такое $r_0'' > 0$, что при $r \in [r_0'', 1)$ выполняется соотношение $\pi/2 - (1-r) < x < \pi/2$. Отсюда следует, что при таком выборе r будет $0 < (t-x)/2 < 1 - r$, а потому верно неравенство

$$\sin^2\frac{t-x}{2} < (1-r)^2. \tag{18}$$

Полагаем $r_0 = \max\{r_0', r_0''\}$. Тогда при $r_0 \leqslant r < 1$ выполняются (16) и (18). Используя эти оценки, последовательными преобразованиями находим

$$(1-r)^2 \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{T_1(r, t-x)dt}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^3} \geqslant \frac{4r\sin x\cos x}{125(1-r)^4} \int\limits_{\pi/2}^{\pi/2+(1-r)} (-\cos t) \times$$
$$\times \sin t dt = \frac{2r\sin x\sin^2(1-r)}{125(1-r)^3} \geqslant \frac{8r\sin x}{125\pi^2(1-r)} \geqslant \frac{C}{1-r}, \tag{19}$$

где $C > 0$ — постоянная.

Легко проверить, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{T_1(r, t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^3}\,dt = 0.$$

Следовательно, из (19) имеем

$$\lim_{r\exp(ix)\widehat{\to}\exp(i\pi/2)} \int\limits_{CE} \frac{(1-r)^2 T_1(r, t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^3}\,dt = -\infty, \tag{20}$$

где $CE = [0, 2\pi] \setminus [\pi/2, \pi]$, если $(r, x) \to (1, \pi/2)$ по кривой, определяемой соотношением (15).

Аналогичным образом доказывается, что в силу (17) при $r_0 \leqslant r < 1$ по той же кривой справедливы предельные соотношения

$$\lim_{r\exp(ix)\widehat{\to}\exp(i\pi/2)} \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{(1-r)^3 T_2(r, t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^4}\,dt = +\infty, \tag{21}$$

$$\lim_{r\exp(ix)\widehat{\to}\exp(i\pi/2)} \int\limits_{CE} \frac{(1-r)^3 T_2(r, t-x)}{[1-2r\cos(t-x)+r^2]^4}\,dt = -\infty. \tag{22}$$

Функцию $f(t)$ определим на $[0, 2\pi]$ равенством

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (\pi/2, \pi] = E, \\ 0, & \text{если } t = \pi/2, \\ -1, & \text{если } t \in CE = [0, 2\pi] \setminus E \end{cases}$$

и продолжим ее периодически на всю ось. Для этой функции $D^2 f(\pi/2) = 0$, однако из (14) и (19)—(22) следует, что конечного нерадиального предела (3) по кривой (15) не существует. Теорема доказана.

1. *Fatou P.* Séries trigonométriques et séries du Taylor.—Acta Math., 1906, 30, p. 335—400.
2. *Bieberbach L.* Lehrbuch der Funnktionentheorie. Moderne Funktionentheorie.— Leipzig — Berlin : Verlag und Druck von B. G. Teubner, 1931.— 370 S.
3. *Валирон Ж.* Аналитические функции.— М. : ГИТТЛ, 1957.— 235 с.
4. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.— М. : Гос. издат. техн. теорет. лит., 1950.— 336 с.
5. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 304 с.
6. *Duren P. L.* Theory H^p Spaces.— New York—London : Academic Press, 1970.— 258 p.
7. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств.— М. : Мир, 1971.— 312 с.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М. : Мир, 1973.— 342 с.
9. *Barbey K., König H.* Abstract Analysis Function Theory and Hardy Algebras.— Berlin — Heidelberg — New York : Springer-Verlag, 1977.— 260 p.
10. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.— М. : Наука, 1974.— 480 с.
11. *Тапурия С. Б.* Граничные свойства продифференцированного интеграла Пуассона в круге.— Труды Груз. политехн. ин-та им. В. И. Ленина, 1975, № 3, (175), с. 13—20.
12. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения мат. физики.— М. : Наука, 1977.— 735 с.
13. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962. В 2-х т. Т. 2.— 416 с.

Тернопольский пединститут
им. Я. Галана

Поступила в редакцию
14.01.82