УДК 517.91

Х. Эшматов, А. Керимов

Обобщение метода замораживания на некоторые классы интегральных уравнений теории вязкоупругости

1. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений вида

$$x(t) = \varepsilon X\left(t, x(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, x(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, x(s))\, ds\right) d\tau\right), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — n-мерный вектор; $X(t, x, y)$, $\varphi(t, \tau, x, z)$ и $\psi(\tau, s, x)$ — вектор-функции, определенные и непрерывные для всех t, τ и s из интервала $[0, \infty)$ и всех $x \in E_n$, $y \in E_m$, $z \in E_k$, где E_n, E_m и E_k — эвклидовы пространства размерностей соответственно n, m и k.

Как известно, исследование различных динамических задач теории вязкоупругости [1] сводится к изучению систем интегральных уравнений вида (1).

В данной работе для построения решения различных интегральных уравнений применяется метод замораживания. Метод замораживания для интегральных уравнений был предложен и достаточно подробно изложен в статье [2]. Дальнейшее обобщение этого метода содержится в работах [3—8].

Наряду с системой интегральных уравнений (1) рассмотрим систему функциональных уравнений

$$u(t) = \varepsilon X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, u(t), \int_0^t \psi(\tau, s, u(t))\, ds\right) d\tau\right). \tag{2}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Пусть неотрицательная и непрерывная функция $u(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет неравенству*

$$u(t) \leqslant c + \int_0^t \mu(t, \tau)\left[u(\tau) + \int_0^\tau \nu(\tau, s)\, u(s)\, ds\right] d\tau, \quad c > 0,$$

где $\mu(t, \tau)$ — непрерывно дифференцируемая по t и непрерывная по τ функция, $\nu(\tau, s)$ — непрерывна по всем аргументам, причем $\mu(t, \tau) \geqslant 0$, $\nu(\tau, s) \geqslant 0$ при $t \geqslant \tau \geqslant s \geqslant 0$. Тогда

$$u(t) \leqslant c \exp\left\{\int_0^t \mu(\tau, \tau)\left[1 + \int_0^\tau \nu(\tau, s)\, ds\right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial \mu(\tau, s)}{\partial \tau}\left[1 + \int_0^s \nu(s, \sigma)\, d\sigma\right] ds\right\}.$$

Доказательство. Пусть

$$z(t) = c + \int_0^t \mu(t, \tau)\left[u(\tau) + \int_0^\tau \nu(\tau, s) u(s)\, ds\right] d\tau.$$

Тогда $\frac{\dot z(t)}{z(t)} = \mu(t, t)\left[\frac{u(t)}{z(t)} + \int_0^t \nu(t, s)\frac{u(s)}{z(t)}\,ds\right] +$

$$+ \int_0^t \frac{\partial\mu(t, \tau)}{\partial t}\left[\frac{u(\tau)}{z(t)} + \int_0^\tau \nu(\tau, s)\frac{u(s)}{z(t)}\,ds\right]d\tau.$$

Так как $[u(t)/z(t)] \leqslant 1$, $[u(s)/z(t)] \leqslant 1$, $[u(\tau)/z(t)] \leqslant 1$, то

$$\ln z(t) - \ln z(0) \leqslant \int_0^t \mu(\tau, \tau)\left[1 + \int_0^\tau \nu(\tau, s)\,ds\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial\mu(\tau, s)}{\partial\tau}\left[1 + \int_0^s \nu(s, \sigma)\,d\sigma\right]ds.$$

Отсюда

$$u(t) \leqslant z(t) \leqslant c\exp\left\{\int_0^t \mu(\tau, \tau)\left[1 + \int_0^\tau \nu(\tau, s)\,ds\right]d\tau +\right.$$

$$\left.+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial\mu(\tau, s)}{\partial\tau}\left[1 + \int_0^s \nu(s, \sigma)\,d\sigma\right]ds\right\}.$$

Лемма доказана.

Сформулируем условия, обеспечивающие близость решений систем (1) и (2).

Теорема 1. *Пусть функции $X(t, x, y)$, $\varphi(t, \tau, x, z)$ и $\psi(\tau, s, x)$ определены и непрерывны в области*

$$Q\{t \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ x \in D \subset E_n,\ y \in E_m,\ z \in E_k\}$$

и в этой области выполнены следующие условия:

1) *функция X удовлетворяет условию Липшица по x и y с постоянной λ, причем $\varepsilon\lambda < 1$;*

2) *функции $\varphi(t, \tau, x, z)$ и $\psi(\tau, s, x)$ удовлетворяют условию Липшица по x и z соответственно с функциями $\mu(t, \tau)$ и $\nu(\tau, s)$, причем*

$$\int_0^t \mu(t, \tau)\,d\tau \leqslant c_1 t, \qquad \int_0^t \mu(t, \tau)\,d\tau \int_0^\tau \nu(\tau, s)\,ds \leqslant c_2 t;$$

3) *функция Липшица $\mu(t, \tau)$ — непрерывно дифференцируема по t, причем*

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial\mu(\tau, s)}{\partial\tau}\,ds \leqslant c_3 t, \qquad \int_0^t d\tau \int_0^\tau \frac{\partial\mu(\tau, s)}{\partial\tau}\,ds \int_0^s \nu(s, \sigma)\,d\sigma \leqslant c_4 t;$$

4) *система (1) имеет единственное непрерывное решение, а система (2) имеет единственное непрерывное для всех $t \geqslant 0$ решение $u = u(t)$, лежащее с некоторой ρ-окрестностью в области D;*

5) *вдоль траектории $u = u(t)$ $|X| \leqslant M$.*

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $|x(t) - u(t)| < \eta$.

Доказательство. Имеем

$$x(t) - u(t) = \varepsilon\left[X\left(t, x(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, x(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, x(s))\,ds\right)d\tau\right) -\right.$$

$$\left.- X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, u(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, u(s))\,ds\right)d\tau\right)\right] +$$

$$+\varepsilon\left[X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, u(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, u(s))\, ds\right) d\tau\right) - \right.$$

$$\left. - X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, u(t), \int_0^\tau \psi(\tau, s, u(t))\, ds\right) d\tau\right)\right].$$

Следовательно,

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon\lambda \left\{ |x(t) - u(t)| + \int_0^t \mu(t, \tau) \left[|x(\tau) - u(\tau)| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^\tau \nu(\tau, s) |x(s) - u(s)|\, ds \right] d\tau \right\} +$$

$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t \mu(t, \tau) \left[u(\tau) - u(t)| + \int_0^\tau \nu(\tau, s) |u(s) - u(t)|\, ds \right] d\tau.$$

Так как $|u(\tau) - u(t)| \leqslant \varepsilon M$, то, используя условия теоремы и применяя доказанное интегральное неравенство, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ находим

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \frac{\varepsilon\lambda ML}{1 - \varepsilon\lambda}(c_1 + c_2) \exp\left\{\frac{\lambda L}{1 - \varepsilon\lambda}(c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\right\}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим другой вариант метода замораживания для системы (1). Системе (1) поставим в соответствие систему функциональных уравнений

$$u(t) = \varepsilon X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi\left(t, \tau, u(t), \int_0^\infty \psi(\tau, s, u(t))\, ds\right) d\tau\right). \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема, обеспечивающая близость решений систем (1) и (3) на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$.

Теорема 2. *Пусть функции* $X(t, x, y)$, $\varphi(t, \tau, x, z)$ и $\psi(\tau, s, x)$ *определены и непрерывны в области* Q *и в этой области выполнены следующие условия*:

1) функции $X(t, x, y)$, $\varphi(t, \tau, x, z)$ и $\psi(\tau, s, x)$ *удовлетворяют условию Липшица*

$$|X(t, x', y') - X(t, x'', y'')| \leqslant \lambda\{|x' - x''| + |y' - y''|\}, \quad \lambda = \mathrm{const},$$

$$|\varphi(t, \tau, x', z') - \varphi(t, \tau, x'', z'')| \leqslant \mu(\tau)\{|x' - x''| + |y' - y''|\},$$

$$|\psi(\tau, s, x') - \psi(\tau, s, x'')| \leqslant \nu(\tau, s)|x' - x''|, \quad x', x'', y', y'', z', z'' \in Q,$$

причем $\varepsilon\lambda < 1$;

2) *функции Липшица* $\mu(\tau)$ *и* $\nu(\tau, s)$ *удовлетворяют неравенству*

$$\int_0^t \mu(\tau)\, d\tau \leqslant c_1 t, \qquad \int_0^t \mu(\tau)\, d\tau \int_0^\tau \nu(\tau, s)\, ds \leqslant c_2 t;$$

3) *система* (1) *имеет единственное непрерывное решение, а система* (3) *имеет единственное непрерывное для всех* $t \geqslant 0$ *решение* $u = u(t)$, *лежащее с некоторой* ρ-*окрестностью в области* D;

4) *вдоль траектории* $u = u(t)$:

$$|X| \leqslant M, \quad \int_0^t \mu(\tau)\, \alpha(\tau, u(t))\, d\tau \leqslant c_3,$$

$$\alpha(\tau, u(t)) = \left|\int_\tau^\infty \psi(\tau, s, u(t))\, ds\right|, \quad M,\ c_3 = \mathrm{const}.$$

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $|x(t) - u(t)| < \eta$.

Доказательство. Аналогично, как и в доказательстве предыдущей теоремы, получаем неравенство

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon\lambda \left\{ |x(t) - u(t)| + \int_0^t \mu(\tau) \left[|x(\tau) - u(\tau)| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^\tau \nu(\tau, s) |x(s) - u(s)| \, ds \right] d\tau \right\} + \varepsilon\lambda \int_0^t \mu(\tau) \left[|u(\tau) - u(t)| + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau \nu(\tau, s) |u(s) - u(t)| \, ds \right] d\tau + \varepsilon\lambda \int_0^t \mu(\tau) \alpha(\tau, u(t)) \, d\tau.$$

Следовательно, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ имеем неравенство

$$|x(t) - u(t)| < \frac{\varepsilon\lambda}{1 - \varepsilon\lambda} [ML(c_1 + c_2) + c_3] \exp\left\{ \frac{\lambda L}{1 - \varepsilon\lambda} (c_1 + c_2) \right\}.$$

Теорема доказана.

2. В качестве примера рассмотрим уравнение свободных колебаний вязкоупругого стержня

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \varepsilon\omega^2 \int_0^t R(t - \tau) y(\tau) \, d\tau, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1.$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение равносильно интегральному уравнению

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t + \varepsilon\omega \int_0^t \sin\omega(t - \tau) \, d\tau \int_0^\tau R(\tau - s) y(s) \, ds,$$

решение которого по вышеизложенному методу имеет вид

$$y(t) \approx c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t +$$

$$+ \frac{\varepsilon\omega \int_0^t \sin\omega(t - \tau) \, d\tau \int_0^\tau R(\tau - s)(c_1 \cos\omega s + c_2 \sin\omega s) \, ds}{1 - \varepsilon\omega \int_0^t \sin\omega(t - \tau) \, d\tau \int_0^\tau R(\tau - s) \, ds},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий.

3. Исследование различных квазистатических задач, учитывающих эффекты наследственности в виде суммы кратных интегралов по главным кубичным теориям вязкоупругости [1, 9] позволяет изучить системы интегральных уравнений вида

$$x(t) = \varepsilon X\left(t, x(t), \int_0^t \varphi_1(t, \tau, x(\tau)) \, d\tau, \right.$$

$$\left. \int_0^t \int_0^t \int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, x(\tau_1), x(\tau_2), x(\tau_3)) \, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right), \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; x — n-мерный вектор $X(t, x, y_1, y_3)$, $\varphi_1(t, \tau, x)$ и $\varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, z_1, z_2, z_3)$ вектор-функции.

Покажем, что для интегральных уравнений вида (4) также справедлив выше предложенный принцип замораживания, а именно системе (4) ставится в соответствие система функциональных уравнений вида

$$u(t) = \varepsilon X\left(t,\ u(t),\ \int_0^t \varphi_1(t, \tau, u(t))\, d\tau,\right.$$
$$\left.\int_0^t\int_0^t\int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, u(t), u(t), u(t))\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right). \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть функции* $X(t, x, y_1, y_3)$, $\varphi_1(t, \tau, x)$ и $\varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, z_1, z_2, z_3)$ *определены и непрерывны в области* $Q\{t \geqslant 0,\ \tau_1, \tau_2, \tau_3 \geqslant 0,\ \tau \geqslant 0,\ x, z_1, z_2, z_3 \in D \subset E_n,\ y_1, y_3, \in E_m\}$ *и в этой области выполнены следующие условия:*

1) *функция* X *удовлетворяет условию Липшица по* x, y_1, y_3 *с постоянной* λ, $\varepsilon\lambda < 1$;

2) *функции* φ_1 *и* φ_3 *удовлетворяют условию Липшица по* x, z_1, z_2, z_3 *соответственно с функциями* $\mu(\tau)$ *и* $\nu(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, ***причем***

$$\int_0^t \mu(\tau)\, d\tau \leqslant c_1 t, \qquad \int_0^t\int_0^t\int_0^t \nu(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \leqslant c_2 t;$$

3) *система* (4) *имеет единственное непрерывное решение, а система* (5) *имеет единственное непрерывное для всех* $t \geqslant 0$ *решение* $u = u(t)$, *лежащее с некоторой* ρ*-окрестностью в области* D;

4) *вдоль траектории* $u = u(t)$ $|X| \leqslant M$.

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* ε_0, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство* $|x(t) - u(t)| < \eta$.

Доказательство. Имеем

$$x(t) - u(t) = \varepsilon\left[X\left(t, x(t), \int_0^t \varphi_1(t, \tau, x(\tau))\, d\tau, \int_0^t\int_0^t\int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, x, (\tau_1),\right.\right.$$
$$\left. x(\tau_2), x(\tau_3))\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right) - X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi_1(t, \tau, u(\tau))\, d\tau, \int_0^t\int_0^t\int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3,\right.$$
$$\left.\left. u(\tau_1), u(\tau_2), u(\tau_3))\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right)\right] + \varepsilon\left[X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi_1(t, \tau, u(\tau))\, d\tau,\right.\right.$$
$$\left.\int_0^t\int_0^t\int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, u(\tau_1), u(\tau_2), u(\tau_3))\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right) - X\left(t, u(t), \int_0^t \varphi_1(t, \tau,\right.$$
$$\left.\left. u(t))\, d\tau, \int_0^t\int_0^t\int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, u(t), u(t), u(t))\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right)\right].$$

Следовательно,

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \varepsilon\lambda\left\{|x(t) - u(t)| + \int_0^t \mu(\tau)\, |x(\tau) - u(\tau)|\, d\tau +\right.$$
$$+ \int_0^t\int_0^t\int_0^t \nu(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\,[\,|x(\tau_1) - u(\tau_1)| + |x(\tau_2) - u(\tau_2)| + |x(\tau_3) -$$
$$\left. - u(\tau_3)|\,]\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right\} + \varepsilon\lambda \int_0^t \mu(\tau)\, |u(\tau) - u(t)|\, d\tau +$$
$$+ \varepsilon\lambda \int_0^t\int_0^t\int_0^t \nu(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\,[\,|u(\tau_1) - u(t)| + |u(\tau_2) - u(t) + |u(\tau_3) -$$
$$- u(t)|\,]\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Используя условия теоремы и применяя соответствующее интегральное неравенство, на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ находим

$$|x(t) - u(t)| \leqslant \frac{\varepsilon\lambda ML}{1-\varepsilon\lambda}(c_1 + 3c_2)\exp\left\{\frac{\lambda L(c_1 + 9c_2)}{1-\varepsilon\lambda}\right\}.$$

Теорема доказана.

Наряду с системой (4) рассмотрим систему функциональных уравнений вида

$$u(t) = \varepsilon X\left(t, u(t), \int_0^\infty \varphi_1(t, \tau, u(t))\,d\tau,\right.$$

$$\left.\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, u(t), u(t), u(t))\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right). \tag{6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполняются все условия предыдущей теоремы. Кроме того, вдоль решения системы* (6) $u = u(t)$ $\alpha(t, u(t)) \leqslant N$, $\beta(t, u(t)) \leqslant K$, N, $K = \mathrm{const}$, где

$$\alpha(t, u(t)) = \left|\int_t^\infty \varphi_1(t, \tau, u(t))\,d\tau\right|,$$

$$\beta(t, u(t)) = \left|\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, u(t), u(t), u(t))\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 -\right.$$

$$\left.-\int_0^t\int_0^t\int_0^t \varphi_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3, u(t), u(t), u(t))\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\right|.$$

Тогда для любых $\eta > 0$ *и* $L > 0$ *можно указать такое* ε_0, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство* $|x(t) - u(t)| < < \eta$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы.

4. В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение, описывающее квазистатические задачи теории вязкоупругости

$$x(t) = f(t) + \varepsilon\int_0^t R(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon\int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\,x(\tau_1)\,x(\tau_2)\,x(\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \tag{7}$$

Отыскивая решение этого уравнения в виде

$$x(t) = f(t) + \varepsilon y(t)$$

и пренебрегая членами высшего порядка малости ε, получаем

$$y(t) = \widetilde{R}(t) + \widetilde{R}_3(t) + \varepsilon\int_0^t R(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau + \varepsilon\int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t -$$

$$-\tau_3)\,[f(\tau_1)\,f(\tau_2)\,y(\tau_3) + f(\tau_1)\,f(\tau_3)\,y(\tau_2) + f(\tau_2)\,f(\tau_3)\,y(\tau_1)]\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{R}(t) = \int_0^t R(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau$$

$$\widetilde{R}_3(t) = \int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1, t-\tau_2, t-\tau_3)\,f(\tau_1)\,f(\tau_2)\,f(\tau_3)\,d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Приведя уравнение (8) к виду (4) и решая его по вышеизложенному методу, находим приближенное решение уравнения (7) в виде

$$x(t)=f(t)+\varepsilon y(t)\approx f(t)+\varepsilon\widetilde{R}(t)+\varepsilon\widetilde{R}_3(t)+\varepsilon^2\left\{\int_0^t R(t-\tau)\,[\widetilde{R}(\tau)+\widetilde{R}_3(\tau)]\,d\tau+\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1,\,t-\tau_2,\,t-\tau_3)\,[f(\tau_1)\,f(\tau_2)\,(\widetilde{R}(\tau_3)+\widetilde{R}_3(\tau_3))+$$

$$\left.+f(\tau_1)\,f(\tau_3)\,(\widetilde{R}(\tau_2)+\widetilde{R}_3(\tau_2))+f(\tau_2)\,f(\tau_3)\,(\widetilde{R}(\tau_1)+\widetilde{R}_3(\tau_1))]\,d\tau_1d\tau_2d\tau_3\right\}/$$

$$/\left\{1-\varepsilon\widetilde{R}(t)-\varepsilon\int_0^t\int_0^t\int_0^t R_3(t-\tau_1,\,t-\tau_2,\,t-\tau_3)\,[f(\tau_1)\,f(\tau_2)+\right.$$

$$\left.+f(\tau_1)\,f(\tau_3)+f(\tau_2)\,f(\tau_3)]\,d\tau_1d\tau_2d\tau_3\right\}.$$

1. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости.— М. : Наука, 1970.— 280 с.
2. *О некоторых* методах исследования нелинейных задач теории вязкоупругости/А. А. Ильюшин, Х. Мовлянкулов, Р. М. Сунчалиев, А. Н. Филатов.— Докл. АН СССР, 1972, 206, № 1, с. 58—61.
3. *Филатов А. Н.* Усреднение в системах дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.— Ташкент : Фан, 1967.— 106 с.
4. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях.— Ташкент : Фан, 1971.— 280 с.
5. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в нелинейной теории вязкоупругости.— Механика полимеров, 1974, № 2, с. 221—229.
6. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974, с. 215.
7. *Митропольский Ю. А., Филатов А. Н.* Усреднение интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.— Укр. мат. журн., 1972, 24, № 1, с. 30—49.
8. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1976.- 152 с.
9. *Ильюшин А. А., Огибалов П. П.* Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра.— Механика полимеров, 1966, № 2, с. 170—176.

Ташкентский политехнический институт им А. Р. Беруни

Поступила в редакцию 15.04.82, после переработки — 20.04.82