УДК 517.5

В. Ф. Бабенко

О поперечниках некоторых классов сверток

1. Пусть L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,— пространства 2π-периодических функций с соответствующими нормами. Обозначим через $W_X^{r,\alpha}$, r, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, $r > 0$, $X = L_1$ или $X = L_\infty$, класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_{r,\alpha}(x-t)\,\varphi(t)\,dt = K_{r,\alpha} * \varphi(x),$$

где

$$K_{r,\alpha}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-r}\cos(\nu x - \alpha\pi/2), \quad \|\varphi\|_X \leqslant 1, \quad \int_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx = 0.$$

Отметим, что для натуральных r $W_X^{r,r}$ — это класс в среднем на периоде равных нулю 2π-периодических функций $f(x)$, таких, что $f^{(r-1)}(x)$ локально абсолютно непрерывна, а $\|f^{(r)}\|_X \leqslant 1$. При $\alpha = r-1$ $W_X^{r,\alpha}$ — класс функций, тригонометрически сопряженных к функциям из класса $W_X^{r,r}$. Еще отметим, что $K_{1,1}(x) = (\pi - x)/2$, $x \in (0, 2\pi)$, и $K_{1,0}(x) = \ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$, $x \in \in (0, 2\pi)$.

Поперечниками Колмогорова класса $W_X^{r,\alpha}$ в пространстве X называются величины

$$d_n(W_X^{r,\alpha}, X) = \inf_{M_n} \sup_{f \in W_X^{r,\alpha}} \inf_{g \in M_n} \| f - g \|_X, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

где $M_n \subset X$ — подпространства размерности n.

Линейные поперечники класса $W_X^{r,\alpha}$ в X — это величины

$$d_n'(W_X^{r,\alpha}, X) = \inf_{A_n} \sup_{f \in W_X^{r,\alpha}} \| f - A_n f \|_X,$$

где inf берется по всем линейным операторам, отображающим X в n-мерные подпространства из X.

Известные результаты (см., напр., [1, 2]) вычисления верхних граней наилучших приближений тригонометрическими полиномами функций из классов $W_X^{r,\alpha}$ в метрике пространства X (напомним, что $X = L_1$ или $X = L_\infty$) дают следующие оценки сверху для поперечников:

$$d_{2n-1}(W_X^{r,\alpha}, X) \leqslant d_{2n-1}'(W_X^{r,\alpha}, X) \leqslant \| K_{r,\alpha} * \varphi_n \|_{L_\infty}, \tag{1}$$

где $\varphi_n(x) = \operatorname{sign} \sin nx$.

Для натуральных r и $\alpha = r$ в работах [3 — 5] была установлена оценка

$$d_{2n-1}(W_X^{r,\alpha}, X) \geqslant \| K_{r,\alpha} * \varphi_n \|_{L_\infty}, \tag{2}$$

и, следовательно, было доказано, что для $r = 1, 2, \dots;\ n = 1, 2, \dots$

$$d_{2n-1}(W_X^{r,r}, X) = d_{2n-1}'(W_X^{r,r}, X) = \| K_{r,r} * \varphi_n \|_{L_\infty}.$$

Цель данной работы — показать справедливость оценки (2) при $r = 1$ и любом $\alpha \in \mathbf{R}^1$.

2. Пусть Γ_n, $n = 1, 2, \dots$, — множество в среднем равных нулю на периоде функций из L_∞, которые принимают только значения $+1$ и -1 и меняют знак на периоде не более $2n$ раз. Через $\Gamma_n^{1,\alpha}$ обозначим множество функций f вида $f(x) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} K_{1,\alpha}(x - t)\varphi(t)\,dt$, где $\varphi \in \Gamma_n$.

Лемма 1. *Для любого $(2n-1)$-мерного подпространства $M \subset L_\infty$ найдется функция $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$, такая, что*

$$\inf_{g \in M} \| f - g \|_{L_\infty} = \| f \|_{L_\infty}.$$

Лемма 2. *Для любого $(2n-1)$-мерного подпространства $M \subset L_1$ существует функция $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$, такая, что*

$$\forall g \in M \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt = 0.$$

Доказательства этих лемм основаны на применении теоремы Борсука и проводятся по известным схемам (см., напр., [1], гл. 10).

Лемма 3. *Пусть $g \in \Gamma_n$, $x_1 < x_2 < \dots < x_{2m} < x_1 + 2\pi$ — точки разрыва функции g, $f(x) = K_{1,\alpha} * g(x)$. Тогда с точностью до знака*

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,\alpha}(x - x_\nu).$$

Лемма 4. *Функция $F(x) = \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,0}(x - x_\nu)$ монотонна на каждом интервале $(x_\nu, x_{\nu+1})$, причем, если на $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ $F(x)$ монотонно* *не убывает (соответственно не возрастает), то на* $(x_\nu, x_{\nu+1})$ *она монотонно не возрастает (соответственно не убывает). Кроме того,* $\lim\limits_{x\to x_\nu} F(x) = \pm\infty$ *и если* $\lim\limits_{x\to x_\nu+0} F(x) = +\infty$ *(соответственно* $-\infty$*), то* $\lim\limits_{x\to x_\nu-0} F(x) = +\infty$ *(соответственно* $-\infty$*).*

Доказательство. Последнее утверждение леммы очевидно, поскольку $\forall x \neq x_\nu + 2l\pi$, $\nu = 1, \ldots, 2m$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$F(x) = \ln \prod_{\nu=1}^{m} \left(\left| \sin \frac{x - x_{2\nu}}{2} \right| \Big/ \left| \sin \frac{x - x_{2\nu-1}}{2} \right| \right).$$

Чтобы доказать монотонность $F(x)$ на каждом интервале $(x_\nu, x_{\nu+1})$, докажем, что функция $F(x) - d$ (d — произвольное число) имеет $\leqslant 2m$ нулей на $\bigcup\limits_{\nu=1}^{2m} (x_\nu, x_{\nu+1})$, $x_{2m+1} = x_1 + 2\pi$. Предположим противное, т. е. предположим, что для некоторого d $F(x) - d$ имеет $\geqslant 2n + 2$ нуля. Тогда равенство

$$\prod_{\nu=1}^{m} \left| \sin \frac{\bar{x}_j - x_{2\nu}}{2} \right| = \exp d \prod_{\nu=1}^{m} \left| \sin \frac{\bar{x}_j - x_{2\nu-1}}{2} \right|$$

выполняется по крайней мере для $2m + 2$ значений $\bar{x}_j \in (x_1, x_1 + 2\pi)$. Но тогда в точках $\bar{x}_j$

$$\prod_{\nu=1}^{m} \sin^2 \frac{\bar{x}_j - x_{2\nu}}{2} - \exp(2d) \prod_{\nu=1}^{m} \sin^2 \frac{\bar{x}_j - x_{2\nu-1}}{2} = 0.$$

Поскольку тригонометрический полином степени $\leqslant m$, стоящий в левой части, отличен от тождественного нуля, мы приходим к противоречию. Лемма доказана.

Следствие 1. *При любом* $\alpha \in \mathbf{R}^1$, $\alpha \neq 2l - 1$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *функция* $F_{1,\alpha}(x) = \sum\limits_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,\alpha}(x - x_\nu)$ *обладает перечисленными в лемме 4 для функции* F *свойствами.*

В самом деле, $K_{1,\alpha}(x)$, очевидно, — линейная комбинация функций $K_{1,1}(x)$ и $K_{1,0}(x)$: $K_{1,\alpha}(x) = AK_{1,1}(x) + BK_{1,0}(x)$, причем $B \neq 0$, так что

$$F_{1,\alpha}(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,\alpha}(x - x_\nu) = A \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,1}(x - x_\nu) + $$
$$+ B \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,0}(x - x_\nu). \tag{3}$$

Теперь утверждение следствия очевидно, так как первое слагаемое постоянно на каждом интервале $(x_\nu, x_{\nu+1})$.

Следствие 2. *Любая функция* $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$ *имеет не более* $2n$ *участков монотонности.*

Напомним, что для $f \in L_1$ сопряженная функция $\tilde{f}$ определяется так:

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi} (P) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t - x}{2} f(t)\, dt,$$

где интеграл $(P) \int\limits_{-\pi}^{\pi}$ понимается в смысле главного значения.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5. *Все функции $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$ имеют одну и ту же вариацию.*

Для доказательства этой леммы достаточно доказать, что $\|f'\|_{L_1}$ для $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$ не зависит от f. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что производные первого порядка функций $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$ имеют одну и ту же функцию распределения.

Предположим, что $\alpha \neq 2l+1$, $l = 0, \pm 1, \pm 1, 2 \ldots$ (для исключенных α утверждение леммы очевидно).

В силу леммы 3 соотношения (3) и того, что $\tilde{K}_{1,1} = K_{1,0}$, для любой $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$ производная f' имеет вид

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,\alpha}(x - x_\nu) = A \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,1}(x - x_\nu) +$$

$$+ B \sum_{\nu=1}^{2m} (-1)^\nu K_{1,0}(x - x_\nu) = A_1 (2\chi(x) - 1) + B_1 (2\chi(x) - 1)^{\sim}, \tag{4}$$

где A_1, B_1 ($B_1 \neq 0$) не зависят от f, χ — характеристическая функция объединения интервалов $E = \bigcup_{\nu=1}^{m} (x_{2\nu-1}, x_{2\nu})$, сумма длин которых по определению Γ_n равна π, продолженная 2π-периодически на всю ось $(2\chi(x) - 1)^{\sim}$ — функция, сопряженная к функции $2\chi(x) - 1$.

В силу (4) для $x \in E$ $f'(x) = A_1 + 2B_1 \tilde{\chi}(x)$, а для $x \in (x_1, x_1 + 2\pi) \setminus E$ $f'(x) = -A_1 + 2B_1 \tilde{\chi}(x)$. Поэтому для любого y в случае $B_1 > 0$

$$\operatorname{mes}\{x \in [0, 2\pi) : f'(x) > y\} = \operatorname{mes}\{x \in E : f'(x) > y\} + \operatorname{mes}\{x \in (x_1, x_1 + 2\pi) \setminus E :$$

$$: f'(x) > y\} = \operatorname{mes}\left\{x \in E : \tilde{\chi}(x) > \frac{1}{2B_1}(y - A_1)\right\} +$$

$$+ \operatorname{mes}\left\{x \in (x_1, x_1 + 2\pi) \setminus E : \tilde{\chi}(x) > \frac{1}{2B_1}(y + A_1)\right\}.$$

Выражение в правой части, как это легко следует из одной теоремы Стейна и Вейса [6] (см. также [7], теорема 1.10), зависит только от mes E, которая у нас постоянна и равна π. Случай $B_1 < 0$ аналогичен. Отсюда легко следует лемма. Лемма доказана.

3. Перейдем к оценкам снизу поперечников.

Лемма 6. *Для $n = 1, 2, \ldots$*

$$\inf_{f \in \Gamma_n^{1,\alpha}} \|f\|_{L_\infty} = \|K_{1,\alpha} * \varphi_n\|_{L_\infty}.$$

Доказательство. При $\alpha = 2l + 1$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, утверждение леммы очевидно.

Предположим (при $\alpha \neq 2l + 1$), что найдется $f \in \Gamma_n^{1,\alpha}$, такая, что $\|f\|_{L_\infty} < \|K_{1,\alpha} * \varphi_n\|_{L_\infty}$. Так как в силу следствия 2 f имеет не более $2n$ участков монотонности и на каждом из них вариация f строго меньше $2\|K_{1,\alpha} * \varphi_n\|_\infty$, то $\bigvee_0^{2\pi}(f) < \bigvee_0^{2\pi}(K_{1,\alpha} * \varphi_n)$, что противоречит лемме 5.

Ввиду леммы 1 и леммы 6 получаем оценку

$$d_{2n-1}(W_{L_\infty}^{1,\alpha}, L_\infty) \geqslant \|K_{1,\alpha} * \varphi_n\|_{L_\infty}. \tag{5}$$

Учитывая теорему двойственности Никольского [8] для наилучших приближений, лемму 2 и лемму 6, получаем оценку

$$d_{2n-1}(W_{L_1}^{1,\alpha}; L_1) \geqslant \|K_{1,\alpha} * \varphi_n\|_{L_\infty}. \tag{6}$$

Сопоставляя (1) с неравенствами (5) и (6), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Для всех* $n = 1,2,\ldots,$ $X = L_1$ *или* $X = L_\infty$ *справедливы равенства*

$$d_{2n-1}(W_X^{1,\alpha}, X) = d'_{2n-1}(W_X^{1,\alpha}, X) = \| K_{1,\alpha} * \varphi_n \|_{L_\infty}.$$

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от абсолютно монотонных ядер.— Мат. заметки, 1974, 16, № 5, с. 631—701.
3. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений.— Успехи мат. наук, 1960, 13, № 3, с. 81—120.
4. *Тихомиров В. М.* Одно замечание об n-мерных поперечниках множеств в банаховых пространствах.— Успехи мат. наук, 1965, 20, № 1, с. 227—230.
5. *Субботин Ю. Н.* Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1971, 108, с. 35—60.
6. *Stein E. M.*, *Weiss G.* An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its application.— J. Math. and Mech., 1959, 8, N 2, p. 263—284.
7. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной.— Соврем. пробл. мат., 1975, 7, с. 5—162.
8. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1946, 10, № 3, с. 207—256.

Днепропетровский госуниверситет
им. 300-летия воссоединения Украины с Россией

Поступила в редакцию
16.04.82