УДК 517.928

А. Б. Васильев

# О непрерывной зависимости по параметру решений дифференциальных включений

Настоящая работа посвящена обобщению теорем о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра и начальных условий [1—3] на дифференциальные включения вида

$$dx(t)/dt \in F(t, x(t), \lambda), \; x(0) = p, \tag{1}$$

где $x, p \in D \subset R^n$ — $n$-мерное вещественное евклидово пространство, $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$ — нормированное пространство, $F: [0, T] \times D \times \Lambda \to \mathrm{Comp}\, R^n$ — многозначное отображение с компактными значениями.

Как следствие получено обоснование первой основной теоремы Боголюбова об усреднении на конечном промежутке [4] для дифференциальных включений с измеримой по $t$ правой частью.

Всюду далее через $|x|$ обозначена евклидова норма $x \in R^n$, через $\rho(x, A)$ — расстояние от точки $x \in R^n$ до множества $A \subset R^n$, а через $h(A, B)$ — расстояние по Хаусдорфу [5] между компактами $A, B \subset R^n$:

$$h(A, B) = \min\{r : A \subset S_r(B),\; B \subset S_r(A)\}, \tag{2}$$

где $S_r(Q)$ — $r$-окрестность множества $Q$. Через $\mathrm{Comp}\, R^n$, $\mathrm{Conv}\, R^n$ обозначены соответственно пространства всех непустых и всех непустых выпуклых компактов из $R^n$, снабженные метрикой Хаусдорфа (2). Под модулем $|A|$ множества $A$ из $\mathrm{Comp}\, R^n$ будем понимать $|A| = h(A, \{0\}) = \sup\{|a| : a \in A\}$. Измеримость многозначных отображений $F: [a, b] \to \mathrm{Comp}\, R^n$ понимается в смысле [6], а интеграл — в смысле Аумана [5, 6], т. е.

$$\int_a^b F(t)\, dt = \left\{\int_a^b f(t)\, dt : f(t) \in F(t),\; t \in [a, b],\; f \in L_1[a, b]\right\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть правая часть дифференциального включения* (1) *такова, что* 1) *при любых фиксированных* $x \in D$, $\lambda \in \Lambda$ *отображение* $F(\cdot, x, \lambda)$ *измеримо на* $[0, T]$, *а при любых фиксированных* $t \in [0, T]$, $\lambda \in \Lambda$ *отображение* $F(t, \cdot, \lambda)$ *непрерывно на* $D$; 2) *при всех* $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times D \times \Lambda$ $|F(t, x, \lambda)| \leqslant M - \mathrm{const}$; 3) *при любых* $x', x'' \in D$ $h(F(t, x', \lambda), F(t, x'', \lambda)) \leqslant k(t)|x' - x''|$, где $\int\limits_{t_1}^{t_2} k(s)\,\mathrm{ds} \leqslant k_0(t_2 - t_1)$ *на любом* $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$, $k_0 - \mathrm{const}$; 4) *равномерно по* $x \in D$ *существует предел*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} h\left(\int\limits_0^t F(s, x, \lambda)\,\mathrm{ds},\ \int\limits_0^t F(s, x, \lambda_0)\,\mathrm{ds}\right) = 0,$$

*где* $\lambda_0$ — *предельная точка множества* $\Lambda$, $t \in [0, T]$. *Тогда для любого* $\eta > 0$ *найдется* $\delta > 0$, *такое, что для любых* $(\lambda, p) \in \Lambda \times D$ *со свойством* $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $|p - p_0| < \delta$ *при* $t \in [0, T]$ *справедливы следующие утверждения:* 1. *Для любого решения* $x(t, \lambda, p)$ *включения* (1) *найдется такое решение* $x_0(t, \lambda_0, p_0)$ *включения*

$$dx_0(t)/dt \in F(t, x_0(t), \lambda_0),\ x_0(0) = p_0, \tag{4}$$

*что выполнится неравенство*

$$|x(t, \lambda, p) - x_0(t, \lambda_0, p_0)| \leqslant \eta. \tag{5}$$

2. *Для любого решения* $x_0(t, \lambda_0, p_0)$ *включения* (4) *найдется решение* $x(t, \lambda, p)$ *включения* (1), *такое, что выполнится неравенство* (5).

Доказательство. Будем действовать аналогично [7, 8]. Как и в этих работах, при доказательстве теоремы без ограничения общности можно считать отображение $F$ выпуклым, т. е. $F: [0, T] \times D \times \Lambda \to \mathrm{Conv}\, R^n$.

Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $x(t)$ — решение включения (1). Разделим $[0, T]$ на $n$ частей:

$$x(t) = x(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t} u^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ x(0) = p, \tag{6}$$

где

$$t \in [t_i, t_{i+1}],\ t_i = iT/n,\ u^*(t) \in F(t, x(t), \lambda),\ i = \overline{0, n-1}. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$y(t) = y(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t} v^*(\tau)\,d\tau,\ y(0) = p, \tag{8}$$

где

$$|v^*(t) - u^*(t)| = \min_{v(t) \in F(t, y(t_i), \lambda)} |v(t) - u^*(t)|. \tag{9}$$

Измеримая однозначная функция $v^*(t)$ в (9) существует согласно обобщению леммы Филиппова о ближайшей точке [9, 10] и единственна в силу выпуклости компактного множества $F(t, y(t_i), \lambda)$ и сильной выпуклости минимизируемой в (9) функции.

Далее, в полной аналогии с работами [7, 8] получаем оценку

$$|x(t) - y(t)| \leqslant MT(\exp(k_0 T) + 1)/n,\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1}. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$y_0(t) = y_0(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t} w^*(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ y_0(0) = p, \tag{11}$$

где

$$|w^*(t) - v^*(t)| = \min_{w(t) \in F(t, y(t_i), \lambda_0)} |w(t) - v^*(t)|,\ t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = \overline{0, n-1}. \tag{12}$$

Из условия 4) теоремы 1 следует, что для любого $\eta_1 > 0$ найдется $\delta_1 > 0$, такое, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$

$$h\left(\int\limits_0^{t_{i+1}} F(t, y(t_i), \lambda)\,dt,\ \int\limits_0^{t_{i+1}} F(t, y(t_i), \lambda_0)\,dt\right) \leqslant \eta_1/2, \tag{13}$$

$$h\left(\int\limits_0^{t_i} F(t, y(t_i), \lambda)\,dt, \int\limits_0^{t_i} F(t, y(t_i), \lambda_0)\,dt\right) \leqslant \eta_1/2. \tag{14}$$

Из (13), (14), пользуясь леммой 3 из работы [6], получаем

$$h\left(\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, y(t_i), \lambda)\,dt,\ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, y(t_i), \lambda_0)\,dt\right) \leqslant \eta_1, \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{15}$$

Отсюда по аналогии с работами [7, 8] имеем оценку

$$|y(t) - y_0(t)| \leqslant n\eta_1 + 2MT/n, \tag{16}$$

а из нее

$$\rho(dy_0(t)/dt,\ F(t, y_0(t), \lambda_0)) \leqslant k(t)(3MT/n + n\eta_1) = \rho(t). \tag{17}$$

Тогда по теореме Филиппова [11] (с учетом замечания Благодатских [10]) при $|p - p_0| \leqslant \delta_2$ существует такое решение $x_0(t, \lambda_0, p_0)$ включения (4), что

$$|y_0(t) - x_0(t)| \leqslant \delta_2 \exp[m(t)] + \int\limits_0^t \exp[m(t) - m(s)]\,\rho(s)\,ds, \tag{18}$$

где $m(t) = \int\limits_0^t k(\tau)\,d\tau$, а $\rho(s)$ определено в (17).

Усиливая неравенство (18), получаем оценку

$$|y_0(t) - x_0(t)| \leqslant \delta_2 \exp(k_0T) + (3MT/n + n\eta_1)[\exp(k_0T) - 1)]. \tag{19}$$

Из оценок (10), (16), (19) после приведения подобных имеем

$$|x(t, \lambda, p) - x_0(t, \lambda_0, p_0)| \leqslant \delta_2 \exp(k_0T) + 4MT\exp(k_0T)/n + \eta_1 n \exp(k_0T). \tag{20}$$

Выбрав в (20) $\delta_2 \leqslant \eta/3\ \exp(k_0T)$, $n \geqslant 12MT\exp(k_0T)/\eta$, $\eta_1 \leqslant \eta/3n\exp(k_0T)$, при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ получим первое утверждение теоремы. Второе доказывается аналогично. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В доказательстве теоремы 1 оценки (13), (14) не зависят от переменной $t$, поскольку семейство $\left\{\Phi_\lambda(t, x) = \int\limits_0^t F(s, x, \lambda)\,ds\right\}$ многозначных отображений $\Phi_\lambda(t, x)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно по $t \in [0, T]$. Действительно, из условия 2 теоремы 1 с помощью леммы 3 работы [6] имеем

$$|\Phi_\lambda(t, x)| = \left|\int\limits_0^t F(s, x, \lambda)\,ds\right| \leqslant \int\limits_0^t |F(s, x, \lambda)|\,ds \leqslant MT - \mathrm{const},$$

$$h(\Phi_\lambda(t_1, x), \Phi_\lambda(t_2, x)) = \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda)\,ds\right| \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} |F(s, x, \lambda)|\,ds \leqslant M|t_2 - t_1|.$$

Таким образом, к семейству отображений $\{\Phi_\lambda(t, x)\}$ применима теорема Арцела [12].

Замечание 2. Сходная теорема доказана в работе [6] при дополнительном предположении (которое существенно используется в доказательстве), что включение (4) имеет единственное решение $x_0(t, \lambda_0, p_0)$. Для дифференциальных включений требование единственности решения представляется неестественным и слишком ограничительным.

Теперь перейдем к обоснованию принципа усреднения для дифференциальных включений с измеримой по $t$ правой частью.

Теорема 2. *Пусть правые части дифференциальных включений*

$$dx(t)/dt \in \varepsilon G(t, x(t)),\ x(0) = p_0,\ 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{21}$$

$$dy(t)/dt \in \varepsilon G_0(y(t)),\ y(0) = p_0, \tag{22}$$

*удовлетворяют следующим требованиям:* 1) *многозначное отображение* $G: [0, +\infty) \times D \to \mathrm{Comp}\, R^n$ *измеримо по* $t$ *на* $[0, +\infty)$ *при любом фиксированном* $x \in D$ *и непрерывно по* $x \in D$ *при любом фиксированном* $t \in [0, +\infty)$; 2) *при всех* $(t, x) \in [0, +\infty) \times D: |G(t, x)| \leqslant M$ — const; 3) *при любых* $x', x'' \in D: h(G(t, x'), G(t, x'')) \leqslant k(t)|x' - x''|$, *где* $\int\limits_{t_1}^{t_2} k(s)\,ds \leqslant k_0(t_2 - t_1)$ *на любом* $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$, $k_0$ — const; 4) *равномерно по* $x \in D$ *существует предел* $\lim\limits_{L\to\infty} h\left(\frac{1}{L}\int\limits_0^L G(s, x)\,ds,\ G_0(x)\right) = 0$, *где среднее* $G_0: D \to \mathrm{Conv}\, R^n$; 5) *решения усредненного включения* (22) *при* $t \in [0, +\infty)$ *лежат в области* $D$ *вместе с некоторой* $\rho$*-окрестностью.*

*Тогда для любого* $\eta > 0$ *найдется* $\varepsilon^0 > 0$, *такое, что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ *на* $[0, T/\varepsilon]$ *справедливы следующие утверждения:* 1. *Для любого решения* $x(t, \varepsilon)$ *включения* (21) *существует такое решение* $y(t, \varepsilon)$ *включения* (22), *что выполняется неравенство*

$$|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leqslant \eta. \tag{23}$$

2. *Для любого решения* $y(t, \varepsilon)$ *включения* (22) *найдется такое решение* $x(t, \varepsilon)$ *включения* (21), *что выполняется неравенство* (23).

Доказательство. Теорема 2 — следствие теоремы 1. Действительно, положим $t = s/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, и представим включения (21), (22) в виде

$$dz(s)/ds \in F(s, z(s), \varepsilon) = G(s/\varepsilon, z(s)),\ z(0) = p_0, \tag{24}$$

$$dz_0(s)/ds \in F(s, z_0(s), 0) = G_0(z_0(s)),\ z_0(0) = p_0. \tag{25}$$

Очевидно, если $z(s, \varepsilon)$ и $z(s, 0)$ — решения включений (24) и (25) соответственно на $[0, T]$, то $x(t, \varepsilon)$, определенное как $x(t, \varepsilon) = Z(\varepsilon t, \varepsilon)$, есть решение включения (21), а $y(t, \varepsilon) = z_0(\varepsilon t, 0)$ — решение включения (22) на $[0, T/\varepsilon)$ и наоборот. Нетрудно показать, что если отображение $G(t, x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2, то отображение, $F(s, z, \varepsilon)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 при $\lambda = \varepsilon$, $\lambda_0 = 0$. Тогда по теореме 1 для любого $\eta > 0$ найдется такое $\varepsilon^0 = \delta > 0$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ решения включений (24) и (25) удовлетворяют неравенству $|z(s, \varepsilon) - z_0(s, 0)| \leqslant \eta$ при $s \in [0, T]$. Тогда $|z(\varepsilon t, \varepsilon) - z_0(\varepsilon t, 0)| \leqslant \eta$ при $t \in [0, T/\varepsilon]$, отсюда $|x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon)| \leqslant \eta$ при $t \in [0, T/\varepsilon]$. Теорема доказана.


1. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова.— Укр. мат. журн., 1952, 4, № 2, с. 215—219.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике.— Успехи мат. наук, 1955, 10, № 3, с. 147—152.
3. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра.— Чехосл. мат. журн., 1957, 7, с. 568—580.
4. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев : Изд-во АН УССР, 1945.— 137 с.
5. *Благодатских В. И.* Теория дифференциальных включений. 1.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.— 89 с.
6. *Dawidowski M.* On some generalization of Bogoliubov averaging theorem.— Funct. et approxim., 1979, N 7, p. 55—70.
7. *Плотников В. А., Васильев А. Б.* Метод усреднения для дифференциальных включений с измеримой правой частью.— 15 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3338—81 Деп.
8. *Плотников В. А.* Частичное усреднение дифференциальных включений.— Мат. заметки, 1980, 27, вып. 6, с. 947—952.

9. *Hermes H.* The generalized differential equation.— Adv. Math., 1970, 4, N 2, p. 149—169.
10. *Благодатских В. И.* О дифференцируемости решений по начальным условиям.— Дифференц. уравнения, 1973, 9, № 12, с. 2136—2140.
11. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., 1967, вып. 3, с. 16—26.
12. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions.— Rend. mat., 1976, 9, N 3, p. 397—408.

Одесский госуниверситет
им. И. И. Мечникова

Поступила в редакцию
06.09.82