УДК 517.937.5.37

В. И. Горбачук

О пространствах бесконечно дифференцируемых векторов неотрицательного самосопряженного оператора

1. Пусть A — неотрицательный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а E_λ, $\lambda \geqslant 0$, — его разложение единицы. Для произвольной непрерывной на $[0, \infty)$ функции $G(\lambda)$, удовлетворяющей условиям

$$G(\lambda) \geqslant 1, \quad \lim_{\lambda \to \infty} G(\lambda) = \infty, \tag{1}$$

на области определения $\mathfrak{D}(G(A))$ оператора $G(A) = \int\limits_0^\infty G(\lambda)\, dE_\lambda$ введем скалярное произведение

$$(f, g)_G = (G(A) f, G(A) g), \quad f, g \in \mathfrak{D}(G(A)).$$

Тогда $\mathfrak{D}(G(A))$ превращается в гильбертово пространство, которое обозначим $\mathfrak{H}_G$. Например, положив $\mathfrak{H} = L^2(\mathbf{R}^1)$, $A = D$ (D — модуль оператора дифференцирования), $G(\lambda) = \lambda^\tau + 1$, $\tau > 0$, получим $\mathfrak{H}_{\lambda^\tau + 1} = W_2^\tau(\mathbf{R}^1)$, где $W_2^\tau(\mathbf{R}^1)$ — соболевское пространство порядка τ [1].

Если для двух функций $G_1(\lambda)$, $G_2(\lambda)$ типа $G(\lambda)$ выполняется неравенство $G_1(\lambda) \geqslant \mu G_2(\lambda)$, $0 < \mu = \mathrm{const}$, то $\mathfrak{H}_{G_1} \subseteq \mathfrak{H}_{G_2} \subseteq \mathfrak{H}$.

Предположим теперь, что $G(\lambda)$, вдобавок к (1), монотонно возрастает и существуют константы $c_1>0$ и $\alpha_0>0$, такие, что

$$G(\lambda)\geqslant c_1\lambda G(\alpha_0\lambda). \tag{2}$$

Кроме того, будем считать, что $G(\lambda)$ — непрерывно дифференцируема и функция $\lambda G'(\lambda)G^{-1}(\lambda)$ монотонна на $[0, \infty)$. По функции $G_\alpha(\lambda)=G(\alpha\lambda)$, $\alpha>0$, построим пространство $\mathfrak{H}_{G_\alpha}$. Ясно, что при $\alpha_1>\alpha_2$ $\mathfrak{H}_{G_{\alpha_1}}\subseteq\mathfrak{H}_{G_{\alpha_2}}$. Так как множество векторов $E(A)=\{E_\Delta f,\ f\in\mathfrak{H},\ \Delta$ — любой ограниченный промежуток из $[0, \infty)\}$, плотно в каждом $\mathfrak{H}_{G_\alpha}$ и содержится в $\bigcap\limits_{\alpha>0}\mathfrak{H}_{G_\alpha}$, то можно образовать [2]

$$\mathfrak{H}_{G,\infty}=\lim_{\alpha\to\infty}\mathrm{pr.}\ \mathfrak{H}_{G_\alpha},\quad \mathfrak{H}_{G,0}=\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{ind.}\ \mathfrak{H}_{G_\alpha}.$$

2. Положим $m_n=\sup\limits_{\lambda\geqslant 1}\dfrac{\lambda^n}{G(\lambda)}$ $(n=0, 1, \ldots)$.

Последовательность m_n положительна и монотонно возрастает. Она обладает следующими свойствами:

1) для любого $\alpha>0$ существует константа $c_2=c_2(\alpha)$, такая, что $m_n\geqslant c_2\alpha^n$, $n\in N$;

2) для любого $n\in N$ $m_n^2\leqslant m_{n-1}m_{n+1}$ (логарифмическая выпуклость);

3) существуют постоянные c_3, h, такие, что $m_{n+1}\leqslant c_3h^nm_n$ $(n\in N)$.

В самом деле, $m_n=\sup\limits_{\lambda\geqslant 1}\dfrac{\lambda^n}{G(\lambda)}\geqslant\dfrac{\alpha^n}{G(\alpha)}$; далее,

$$m_n^2=\left(\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^n}{G(\lambda)}\right)^2=\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^{2n}}{G^2(\lambda)}\leqslant\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^{n-1}}{G(\lambda)}\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^{n+1}}{G(\lambda)}=m_{n-1}m_{n+1};$$

свойство 3) вытекает из оценок

$$m_{n+1}=\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^{n+1}}{G(\lambda)}\leqslant c_1^{-1}\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{\lambda^n}{G(\alpha_0\lambda)}=\frac{c_1^{-1}}{\alpha_0^n}\sup_{\lambda\geqslant 1}\frac{(\alpha_0\lambda)^n}{G(\alpha_0\lambda)}\leqslant c_3h^nm_n$$

$$(c_3=\mathrm{const},\ h=\alpha_0^{-1}).$$

Введем $\mathfrak{G}_\alpha\langle m_n\rangle$ как совокупность векторов $f\in\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\mathfrak{D}(A^n)$, таких, что

$$\|A^nf\|\leqslant c_4\alpha^nm_n\quad (n=0, 1, \ldots;\ c_4=c_4(f)=\mathrm{const}). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что это множество образует банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{G}_\alpha\langle m_n\rangle}=\sup_n\frac{\|A^nf\|}{\alpha^nm_n}.$$

Оно содержит $E(A)$. При $\alpha_1<\alpha_2$ $\mathfrak{G}_{\alpha_1}\langle m_n\rangle\subseteq\mathfrak{G}_{\alpha_2}\langle m_n\rangle$. Обозначим

$$\mathfrak{G}_0\langle m_n\rangle=\lim_{\alpha\to 0}\mathrm{pr.}\ \mathfrak{G}_\alpha\langle m_n\rangle,\quad \mathfrak{G}_\infty\langle m_n\rangle=\lim_{\alpha\to\infty}\mathrm{ind.}\ \mathfrak{G}_\alpha\langle m_n\rangle.$$

Теорема. *Справедливы равенства*

$$\mathfrak{G}_0\langle m_n\rangle=\mathfrak{H}_{G,\infty},\quad \mathfrak{G}_\infty\langle m_n\rangle=\mathfrak{H}_{G,0}. \tag{4}$$

Для доказательства потребуется следующая

Лемма. *Пусть* $T(\lambda)=\sup\limits_n\dfrac{\lambda^n}{m_n}$. *Тогда при* $\lambda\geqslant 1$

$$T(\lambda)\leqslant G(\lambda)\leqslant\lambda T(\lambda). \tag{5}$$

Доказательство. Имеем

$$T(\lambda)=\sup_n \frac{\lambda^n}{m_n}=\sup_n \frac{\lambda^n}{\sup\limits_{r\geqslant 1}\dfrac{r^n}{G(r)}}\leqslant \sup_n \frac{\lambda^n}{\lambda^n G^{-1}(\lambda)}=G(\lambda).$$

Для доказательства правого неравенства в (5) рассмотрим функцию $H(r)=\sup\limits_{\lambda\geqslant 1}\dfrac{\lambda^r}{G(\lambda)}$ $(r>0)$. Очевидно, $H(n)=m_n$. Из определения $H(r)$ вытекает, что для произвольного $\lambda\geqslant 1$ найдется r_λ, такое, что $H(r_\lambda)=\lambda^{r_\lambda}G^{-1}(\lambda)$, а именно $r_\lambda=\lambda G'(\lambda)/G(\lambda)$. Тогда

$$G(\lambda)=\frac{\lambda^{r_\lambda}}{H(r_\lambda)}\leqslant \sup_r \frac{\lambda^r}{H(r)}\stackrel{\text{def}}{=}T_H(\lambda).$$

С другой стороны,

$$T_H(\lambda)=\sup_r \frac{\lambda^r}{H(r)}=\sup_r \frac{\lambda^r}{\sup\limits_{p\geqslant 1}(p^r G^{-1}(p))}\leqslant \sup_r \frac{\lambda^r}{\lambda^r G^{-1}(\lambda)}=G(\lambda).$$

Таким образом, $T_H(\lambda)=G(\lambda)$ и в силу монотонности $H(r)$

$$G(\lambda)=\sup_r \frac{\lambda^r}{H(r)}\leqslant \sup_r \frac{\lambda^{[r]+1}}{H([r])}=\lambda\sup_n \frac{\lambda^n}{m_n}=\lambda T(\lambda)$$

(здесь $[r]$ — целая часть числа r).

Доказательство теоремы. Пусть $f\in\mathfrak{G}_0\langle m_n\rangle$ $(f\in\mathfrak{G}_\infty\langle m_n\rangle)$. Это означает, что для любого $\alpha>0$ существует константа $c_4=c_4(\alpha)$ (существуют c_4, $\alpha>0$), такая, что выполнено (3). Тогда в силу леммы Фату

$$\left(\int_0^\infty \lambda^{2n}d(E_\lambda f, f)\leqslant c_4\alpha^{2n}m_n^2\right)\Rightarrow\left(\int_0^\infty \lambda^{2n}\alpha^{-2n}m_n^{-2}d(E_\lambda f, f)\leqslant c_4\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\int_0^\infty \mu^{2n}m_n^{-2}d(E_{\mu\alpha}f, f)\leqslant c_4\right)\Rightarrow\left(\int_0^\infty T^2(\mu)\,d(E_{\mu\alpha}f, f)\leqslant c_4\right).$$

Учитывая оценку (5) для функции $T(\lambda)$ и свойство (2) для $G(\lambda)$, получим

$$\left(\int_0^\infty G^2(\mu)\,\mu^{-2}d(E_{\mu\alpha}f, f)\leqslant c_4\right)\Rightarrow\left(\int_0^\infty G^2\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{-2}d(E_\lambda f, f)\leqslant c_4\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\int_0^\infty G^2\left(\alpha_0\frac{\lambda}{\alpha}\right)d(E_\lambda f, f)<\infty\right),$$

т. е. $f\in\mathfrak{H}_{G_{\alpha_0\alpha^{-1}}}$ при любом (некотором) $\alpha>0$, а значит, $f\in\mathfrak{H}_{G,\infty}$ $(f\in\mathfrak{H}_{G,0})$. Итак, $\mathfrak{G}_0\langle m_n\rangle\subseteq\mathfrak{H}_{G,\infty}$, $\mathfrak{G}_\infty\langle m_n\rangle\subseteq\mathfrak{H}_{G,0}$.

Обратно, пусть $f\in\mathfrak{H}_{G,\infty}$ $(f\in\mathfrak{H}_{G,0})$, т. е. для любого $\alpha>0$ существует константа $c_5=c_5(\alpha)$ (существуют c_5, $\alpha>0$), такая, что $\int\limits_0^\infty G^2(\alpha\lambda)\,d(E_\lambda f, f)\leqslant c_5$. Поскольку $G(\lambda)$ растет быстрее любой степени λ, то $f\in\bigcap\limits_{n=0}^\infty\mathfrak{D}(A^n)$ и

$$\|A^n f\|^2=\int_0^\infty \lambda^{2n}d(E_\lambda f, f)=\alpha^{-2n}\int_0^\infty \frac{(\alpha\lambda)^{2n}}{G^2(\alpha\lambda)}G^2(\alpha\lambda)\,d(E_\lambda f, f)\leqslant c_5 m_n^2(\alpha^{-1})^{2n}.$$

Таким образом, $f \in \mathfrak{G}_{\alpha-1}\langle m_n\rangle$ при любом (некотором) α, т. е. $f \in \mathfrak{G}_0\langle m_n\rangle$, $f \in \mathfrak{G}_\infty\langle m_n\rangle$.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что пространства $\mathfrak{G}_0\langle m_n\rangle$ и $\mathfrak{H}_{G,\infty}$, $\mathfrak{G}_\infty\langle m_n\rangle$ и $\mathfrak{H}_{G,0}$ совпадают не только как множества, но и топологически.

3. Будем говорить, что вектор $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$ принадлежит классу Жевре порядка β, $0<\beta<\infty$, типа Румье (типа Берлинга), если существуют положительные постоянные c, α (для всякого $\alpha>0$ существует $c>0$), такие, что

$$\|A^n f\| \leqslant c\alpha^n n^{n\beta} \tag{6}$$

(очевидно, в неравенстве (6) $n^{n\beta}$ можно заменить на $(n!)^\beta$). Для ограниченного A эти классы совпадают с $\mathfrak{H}$, поэтому говорить о них имеет смысл лишь в случае неограниченного оператора A, хотя здесь возможна и другая крайность: классы Жевре могут оказаться пустыми. Класс Жевре порядка β типа Румье (типа Берлинга) обозначим через $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}=\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}= \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$). Ясно, что $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}$ и $\mathfrak{G}_{(\beta)}$ образуют векторные пространства над полем комплексных чисел. Класс $\mathfrak{G}_{\{1\}}$, очевидно, совпадает с множеством аналитических векторов оператора A (см., напр., [3]) и при $\beta_1<\beta_2$ $\mathfrak{G}_{\{\beta_1\}} \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}$ ($\mathfrak{G}_{(\beta_1)} \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}$).

Обозначим через $\mathfrak{G}_\beta^\alpha=\mathfrak{G}_\beta^\alpha(A)$ множество всех $f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{D}(A^n)$, для которых выполнено неравенство (6) с фиксированным α. Это банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{G}_\beta^\alpha}=\sup_n \frac{\|A^n f\|}{\alpha^n n^{n\beta}}.$$

При $\alpha_1<\alpha_2$ $\mathfrak{G}_\beta^{\alpha_1} \subseteq \mathfrak{G}_\beta^{\alpha_2}$. Поэтому пространство $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}$) можно снабдить топологией индуктивного (проективного) предела банаховых пространств $\mathfrak{G}_\beta^\alpha$:

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}=\lim_{\alpha\to\infty} \operatorname{ind.} \mathfrak{G}_\beta^\alpha, \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}=\lim_{\alpha\to 0} \operatorname{pr.} \mathfrak{G}_\beta^\alpha.$$

Рассмотрим функцию $G(\lambda)=e^{\lambda^{1/\beta}}$, которая, очевидно, удовлетворяет всем условиям, наложенным на $G(\lambda)$. Нетрудно подсчитать, что для нее

$$m_n=\sup_{\lambda\geqslant 1}(\lambda^n e^{-\lambda^{1/\beta}})=(e^{-\beta}\beta^\beta)^n n^{n\beta},$$

а потому $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}=\mathfrak{G}_\infty\langle n^{n\beta}\rangle$, $\mathfrak{G}_{(\beta)}=\mathfrak{G}_0\langle n^{n\beta}\rangle$. В силу доказанной теоремы $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}=\mathfrak{H}_{G,0}$, $\mathfrak{G}_{(\beta)}=\mathfrak{H}_{G,\infty}$, где $\mathfrak{H}_{G,0}$ ($\mathfrak{H}_{G,\infty}$) — индуктивный (проективный) предел гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{e^{(\alpha\lambda)^{1/\beta}}}$.

В частности, при $\mathfrak{H}=L^2(\mathbf{R}^1)$, $A=D$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(D)=\left\{f \in L^2(\mathbf{R}^1): \exists\, c,\ \alpha>0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}|f^{(n)}(x)|^2\,dx \leqslant c\alpha^{2n}n^{2n\beta} \quad \forall\, n \in N\right\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(D)=\left\{f \in L^2(\mathbf{R}^1): \forall\, \alpha>0\ \exists\, c>0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}|f^{(n)}(x)|^2\,dx \leqslant c\alpha^{2n}n^{2n\beta}\right\}.$$

Пространство $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(D)$ ($\mathfrak{G}_{(\beta)}(D)$), $\beta>1$, — обычный класс Жевре порядка β типа Румье (типа Берлинга) [4]. Таким образом, обычные классы Жевре можно рассматривать как индуктивные или проективные пределы гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_{e^{(\alpha\lambda)^{1/\beta}}}(D)$.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М. : Физматгиз, 1959.— 684 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность.— М. : Мир, 1978.— 395 с.
4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ.— М. : Физматгиз, 1960.— 388 с.

Институт математики АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию
19.11.82