УДК 517.937+519.217

А. И. Зейфман

Об асимптотическом поведении решений прямой системы Колмогорова

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = -a_{ii}(t)\,y_i + \sum_{j\neq i} a_{ij}(t)\,y_j, \qquad i=1,2,\ldots, \tag{1}$$

считая, что при $t \geqslant 0$

$$a_{ij}(t) \geqslant 0, \qquad i,j=1,2,\ldots, \tag{2}$$

$$a_{ii}(t) = \sum_{j\neq i} a_{ji}(t), \quad i=1,2,\ldots, \quad \sup_i a_{ii}(t) < \infty.$$

Система (1) называется [1] прямой системой Колмогорова и описывает поведение вероятностей перехода неоднородных марковских цепей с непрерывным временем и счетным числом состояний.

Предположим, что существует набор неотрицательных локально суммируемых при $t \geqslant 0$ функций $b_1(t), \ldots, b_M(t)$, таких, что

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{M} c_k^{(ij)} b_k(t), \qquad i,j=1,2,\ldots,$$

причем

$$c_k^{(ij)} \geqslant 0, \quad \sup_i \sum_{k=1}^{M} c_k^{(ii)} < \infty.$$

Тогда систему (1) можно рассматривать в соответствии с ее вероятностным смыслом как дифференциальное уравнение

$$y' = A(t)\,y \tag{3}$$

с ограниченным оператором A (t) в пространстве последовательностей l_1, применяя к исследованию этого уравнения соответствующие результаты [2]. Далее система (1) и уравнение (3), соответствующее ей, часто будут отождествляться. Предположим существование такого N, что при $i > j + Na_{ij}(t) \equiv 0$. Это условие выполняется для важнейших частных случаев: системы, описывающей процесс рождения и гибели (для нее $a_{ij}(t) \equiv 0$) при $|i-j| > 1$ [1, 3]), и системы, описывающей процесс вырождения полимеров ($a_{11}(t) \equiv 0$, $a_{ij}(t) \equiv 0$ при $i > j$ [4, 5]).

В настоящей работе выясняется поведение решений системы (1) при $t \to \infty$, при этом обобщаются и уточняются результаты [5].

Пусть $1 = d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots$, $D = \operatorname{diag}_i (d_i)$. Рассмотрим множество векторов $x = \operatorname{col}_i (x_i)$, таких, что $\sum_i |d_i x_i| < \infty$. Это множество с нормой $\|x\| = \sum_i |d_i x_i|$ будет банаховым пространством; обозначим его l_{1D}. Далее будет использовано понятие логарифмической нормы оператора $\gamma(A)$ [2, 6]. Для удобства записи будем считать, что если $i\leqslant 0$ или $j\leqslant 0$, то $a_{ij}(t)\equiv 0$. Будем пока считать коэффициенты a_{ij} постоянными. Предположим, что существует $0<r<1$, такое, что

$$a_{i+k,i}\leqslant r a_{i-k,i},\quad 1\leqslant k\leqslant N,\quad i=2,3,\ldots \tag{4}$$

Отметим, что при выполнении условия (4) неравенства

$$\inf_{i>1} a_{ii}>0, \tag{5}$$

$$\inf_{i>1}\max_{1\leqslant k\leqslant N} a_{i-k,i}=m>0 \tag{6}$$

выполняются одновременно. Обозначим через s множество векторов из l_1 с неотрицательными координатами и нормой I. Очевидно, это множество инвариантно для системы (1).

Лемма. *Пусть коэффициенты системы* (1) *постоянны,* $a_{11}=0$; *существует* N, *такое, что при* $i>j+N$ $a_{ij}=0$ *и выполняются условия* (4), (6). *Тогда существует пространство* $l_{1D}\neq l_1$, *такое, что уравнение* (1) *имеет отрицательный генеральный показатель* $-\nu$ $(\nu\geqslant(1-r^{1/2N})\times$ $\times(1-r^{1-1/2N})m)$ *в* s *в пространстве* l_{1D}.

Доказательство. Пользуясь s-инвариантностью системы, положим $\sum_{i=1}^{\infty} y_i(0)=0$. Тогда при $t\geqslant 0$ $y_1=-\sum_{i\geqslant 2} y_i$ и с учетом условия $a_{11}=0$ из (1) получим следующую систему:

$$y_k'=-a_{kk}y_k+\sum_{j\neq k} a_{kj}y_j,\qquad k=2,3,\ldots \tag{7}$$

Обозначим через $A_1(t)$ оператор соответствующего дифференциального уравнения, в условиях леммы этот оператор постоянен. Положим $d_{k+1}=$ $=r^{-k/2N}$, $k=0,1,\ldots$, и покажем, что выбранное пространство удовлетворяет нужным условиям. Найдем $\gamma(A_1)_{l_{1D}}=\gamma(DA_1D^{-1})_{l_1}$. Считая $d_i=0$ при $i\leqslant 0$, получим:

$$\gamma(DA_1D^{-1})_{l_1}\leqslant\sup_i\left[-a_{22}+d_2a_{32},\ -a_{ii}+\sum_{k=1}^{N}\frac{d_{i+k-1}}{d_{i-1}}a_{i+k,i}+\right.$$

$$\left.+\frac{d_{i-k-1}}{d_{i-1}}a_{i-k,i}\right]\leqslant\sup_i\left[a_{12}(-1+rd_2-r),\ \sum_{k=1}^{N}a_{i-k,i}\left(\frac{d_{i-k-1}}{d_{i-1}}-1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+r\frac{d_{i+k-1}}{d_{i-1}}-r\right)\right]\leqslant\sup_i\left[m(-1-r+r^{1-1/2N}),\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{N}a_{i-k,i}(r^{k/2N}-1+r^{1-k/2N}-r)\right].$$

Отметим, что

$$-\sum_{k=1}^{N}a_{i-k,i}(r^{k/2N}-1+r^{1-k/2N}-r)\geqslant\sum_{k=1}^{N}a_{i-k,i}(1+r-r^{1/2N}-r^{1-1/2N})\geqslant$$

$$\geqslant m(1-r^{1/2N})(1-r^{1-1/2N}).$$

Тогда

$$\gamma(A_1)_{l_{1D}}\leqslant-(1-r^{1/2N})(1-r^{1-1/2N})m. \tag{8}$$

Из последнего неравенства и получим утверждение леммы.

Пусть $a_{ij}(t)$ — функции. Вместо (6) рассмотрим неравенство

$$\inf_{i>1}\max_{1\leqslant k\leqslant N}\varlimsup_{t,\tau\to\infty}\frac{1}{t}\int_{\tau}^{t+\tau}a_{i-k,i}(u)\,du=m>0. \tag{9}$$

$$\text{Обозначим }\varlimsup_{t,\tau\to\infty}\frac{1}{t}\int_{\tau}^{t+\tau}a_{11}(u)\,du=a_{11}^{0}.$$

Теорема. *Пусть для коэффициентов системы* (1) *существует* N, *такое, что* $a_{ij}(t)\equiv 0$ *при* $i>j+N$, *при всех* $t\geqslant 0$ *выполняется неравенство* (4) *и справедливо неравенство* (9). *Пусть* $a_{11}^{0}<r^{1/2}(1-r^{1/2N})(1-r^{1-1/2N})m$. *Тогда система* (1) *асимптотически устойчива в* s *в пространстве* l_1, *причем имеет отрицательный генеральный показатель* $-\nu$ $(\nu\geqslant(1-r^{1/2N})(1-r^{1-1/2N})m-a_{11}^{0}/\sqrt{r}$ *в* s *в выбранном пространстве* l_{1D}.

Доказательство. Считая $\sum_i y_i=1$, получим $y_1=1-\sum_{i\geqslant 2}y_i$ и от системы (1) перейдем к системе

$$z'=\begin{pmatrix}-(a_{22}+a_{21}) & a_{23}-a_{21}\ \dots\\ a_{32}-a_{31} & -(a_{33}+a_{31})\ \dots\\ -a_{41} & \dots\\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ -a_{N+11} & \dots\\ 0 & \dots\end{pmatrix}z+$$

$$+\begin{pmatrix}a_{21}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{N+11}\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix}\equiv A_2(t)z+f(t). \tag{10}$$

Используя результат леммы и стандартные рассуждения, получим отрицательность в выбранном пространстве генерального показателя уравнения $dx/dt=A_2(t)x$. Так как система (1), очевидно, устойчива по Ляпунову, то в пространстве l_1 устойчива и система (10). А тогда (10) асимптотически устойчива и в l_1, что и требовалось доказать. Отметим, что асимптотическая устойчивость системы (1) в s в пространстве l_1, вообще говоря, не равномерная.

Следствие. *Пусть коэффициенты системы* (1) — *ω-периодичны или почти периодичны и выполняются остальные условия теоремы. Тогда система* (1) *имеет в пространстве* l_1 *асимптотически устойчивое в* s *ω-периодическое или почти периодическое решение.*

1. *Баруча-Рид А. Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения.— М. : Наука, 1969.— 512 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М. : Наука, 1970.— 536 с.

3. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания.— М.: Наука, 1966.— 432 с.
4. *Oguztöreli M. N.* On an infinitive system of differential equations occuring in the degradations of polymers. 1.— Util. Math., 1972, 1, p. 141—155.
5. *Yoon Y. I.* Stability of an infinitive system of differential equations for the kinetics of polymer degradation.— In: Dyn. Syst. Proc. Univ. Fla. Int. Symp., Gaineswille, 1976. New York: 1977, p. 507—511.
6. *Лозинский С. М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения.— Изв. вузов. Математика, 1958, № 5, с. 52—90.

Вологодский пединститут

Поступила в редакцию
29.09.81