УДК 517.53

В. А. Зморович, И. К. Коробкова

О методе выпуклой области в теории специальных классов однолистных функций

В настоящей работе доказываются две теоремы как примеры дальнейшего развития метода решения экстремальных задач, предложенного в работах [1, 2].

Обозначим через $P(m)$, где m — целое $\geqslant 1$, тот подкласс класса C Каратеодори в круге $E(z:|z|<1)$, функции которого удовлетворяют условиям $p(0)=1\ \forall z\in E$, $p(\varepsilon z)=p(z)$, $\varepsilon=\exp(2\pi i/m)$. Через $S_\gamma^*(m,\beta)$, $0\leqslant\gamma<1$, $0<\beta\leqslant 1$, обозначим класс регулярных в E функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, для которых

$$zf'(z)/f(z)=[(p(z)+h)/(1+h)]^\beta, \tag{1}$$

где $h=\gamma/(1-\gamma)$, $p(z)\in P(m)$. Аналогично через $\Sigma_\gamma^*(m,\beta)$ обозначим класс регулярных в области $E^*(z:0<|z|<1)$ функций $F(z)$, которые определяются уравнением

$$-zF'(z)/F(z)=[(p(z)+h)/(1+h)]^\beta, \tag{2}$$

когда $p(z)$ пробегает класс $P(m)$, и разлагаются в E^* в ряд Лорана вида $F(z)=1/z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kz^{km-1}$. Функции класса $S_\gamma^*(m,\beta)$ однолистны и звездны в E, а класса $\Sigma_\gamma^*(m,\beta)$ — в E^*.

Положим $I(\varphi(z),\alpha)=(1-\alpha)[z\varphi'(z)/\varphi(z)]+\alpha[1+z\varphi''(z)/\varphi'(z)]$, где $\alpha>0$, а $\varphi(z)$ регулярна в E^* и удовлетворяет условию $\varphi(z)\varphi'(z)/z\neq 0$. Ставим задачу отыскания радиуса α-выпуклости классов $S_\gamma^*(m,\beta)$ и $\Sigma_\gamma^*(m,\beta)$, т. е. отыскания точной верхней границы таких значений $r\in]0,1[$, для которых неравенство $\operatorname{Re} I(\varphi(z),\alpha)>0$ выполняется каждой функцией $\varphi(z)\in\in S_\gamma^*(m,\beta)$ или соответственно каждой функцией класса $\Sigma_\gamma^*(m,\beta)$ в круге $|z|<r$.

Условимся обозначать эти радиусы α-выпуклости соответственно через r_α и r_α^*. Кроме введенных выше обозначений α,β,γ,m,h и др. введем еще некоторые, которые, как и предыдущие, будут сохранены в дальнейшем.

Пусть $\beta_0=m\beta\alpha$, $a=(1+r^{2m})/(1-r^{2m})$, где $0<r=|z|<1$, $A=1/\beta_0(1+h)^\beta$. Справедливы такие утверждения.

Теорема 1. *Положим* $a=\omega(\eta)\equiv\eta+A(h+\eta)^{1+\beta}/\eta$, $\lambda(\eta)=\eta^2-1+2A(h+\eta)^{1+\beta}$, $\mu(\eta)=\eta^2/A(h+\eta)^\beta+\beta\eta-h$, $\eta>0$. *Если* η_2 — *положительный корень уравнения* $\mu(\eta)=0$, *а* η_1 — *положительный корень уравнения* $\lambda(\eta)=0$ (η_1 *существует только при* $1>2Ah^{1+\beta}$), *то при* $\eta_2\geqslant\eta_1$ *имеем*

$$r_\alpha=[(\omega(\eta_2)-1)/(\omega(\eta_2)+1)]^{1/2m}, \tag{3}$$

а при $\eta_2 \leqslant \eta_1$

$$r_\alpha = [(1-\eta_1)/(1+\eta_1)]^{1/m}. \qquad (4)$$

При $1 \leqslant 2Ah^{1+\beta}$ *применяется формула* (3).

Теорема 2. *Положим* $\omega_1(\eta) = [1 + A(h+\eta)^{1+\beta}]/\eta$, $\lambda_1(\eta) = -\eta^2 + 1 + 2A(h+\eta)^{1+\beta}$, $\mu_1(\eta) = 1/A\beta(h+\eta)^\beta + h(1+\beta)/\beta(h+\eta) - 1$ *и пусть* η_1 *и* η_2 — *положительные корни соответственно уравнений* $\lambda_1(\eta) = 0$ *и* $\mu_1(\eta) = 0$. *Тогда при* $\eta_2 \leqslant \eta_1$ *имеем*

$$r_\alpha^* = [(\omega_1(\eta_2) - 1)/(\omega_1(\eta_2) + 1)]^{1/2m}, \qquad (5)$$

а при $\eta_2 \geqslant \eta_1$

$$r_\alpha^* = [(\eta_1 - 1)/(\eta_1 + 1)]^{1/m}. \qquad (6)$$

Примечание. Во всех случаях, когда в формулировках теорем говорится о корнях уравнений, эти корни — единственные и существуют при всех допустимых значениях параметров за исключением случая, оговоренного в теореме 1.

Доказательство теоремы 1. Применяя теорему 2 из работы [3] к функционалу $\mathrm{Re}\, I(f(r), \alpha)$, где $f(r)$ определяется формулой (1), сводим задачу отыскания r_α к следующему: на кривой L, определяемой уравнением $\xi = \eta + A(h+\eta)^{1+\beta}/\eta$ в декартовых координатах ξ и η ($\xi > 0$, $\eta > 0$), нужно найти точку $M_0(\xi_0, \eta_0)$, удовлетворяющую условиям: 1) $M_0 \in \Omega$, где Ω — область $\eta(2\xi - \eta) \geqslant 1$, $\eta > 0$; 2) абсцисса ξ_0 имеет наименьшее возможное значение. Анализ показывает, что кривая L имеет единственную общую точку $M_1(\xi_1, \eta_1)$ с границей области Ω. Ордината η_1 этой точки определяется уравнением $\lambda(\eta) = 0$. Кроме того, на кривой L имеется единственная точка $M_2(\xi_2, \eta_2)$, ближайшая к оси ординат.

Ордината η_2 этой точки есть положительный корень уравнения $\mu(\eta) = 0$. Если точка $M_2 \in \Omega$, то должно выполняться условие $\eta_2(2\xi_2 - \eta_2) \geqslant 1$, которое равносильно $\lambda(\eta_2) \geqslant 0$. Поскольку $\lambda(\eta_1) = 0$ то легко заметить, что должно быть $\eta_2 \geqslant \eta_1$. В этом случае $\xi_0 = \xi_2 = \omega(\eta_2)$ и мы получаем формулу (3), т. к. для каждой точки области Ω $\xi = a = (1 + r^{2m})/(1 - r^{2m})$.

Если же $\eta_1 \geqslant \eta_2$, то точка $M_2 \overline{\in} \Omega$ и потому $\xi_0 = \xi_1 = 1/2\,(\eta_1 + 1/\eta_1)$. Учитывая, что $0 < \eta_1 < 1$, получаем формулу (4). Теорема 1 доказана.

Вопрос о точности полученных формул, как известно, всегда решается положительно при применении теоремы 2 из работы [3].

Доказательство теоремы 2. Действуя аналогично доказательству теоремы 1, мы сводим задачу к отысканию такой точки $M_0(\xi_0, \eta_0)$ на кривой L_1, определяемой уравнением $\xi = \omega_1(\eta) = [1 + A(h + \eta)^{1+\beta}]/\eta$, $\eta > 0$, что $M_0 \in \Omega$ и обладает наименьшей возможной абсциссой. Проверка показывает, что кривая L_1 имеет единственную общую точку $M_1(\xi_1, \eta_1)$ с границей области Ω, ордината которой η_1 есть положительный корень уравнения $\lambda_1(\eta) = 0$. Кроме того, на L_1 есть единственная, ближайшая к оси ординат, точка $M_2(\xi_2, \eta_2)$, ордината которой есть положительный корень уравнения $\mu_1(\eta) = 0$. Точка $M_2 \in \Omega$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1(\eta_2) \geqslant 0$. Так как $\lambda_1(\eta_1) = 0$, то легко заключить, что $\eta_2 \leqslant \eta_1$. В этом случае $\xi_0 = \xi_2 = \omega_1(n_2)$ и мы получаем формулу (5).

Если же $\eta_2 \geqslant n_1$, то $\xi_0 = \xi_1 = (\eta_1 + 1/\eta_1)/2$ и поэтому верна формула (6), т. к. $\eta_1 > 1$. Теорема 2 доказана.

Анализ уравнения $\lambda(\eta) - \mu(\eta) = 0$ дает в случаях обеих теорем возможность получить критерий разграничения формул (3) и (4), а также (5) и (6) по величине параметра h. Однако мы опускаем изложение получаемых при этом результатов.

Предлагаемое наименование метода — метод выпуклой области — подчеркивает роль выпуклой области Ω, существенно упрощающую анализ. Сама же область Ω часто встречается в экстремальных задачах теории специальных классов однолистных функций. Возможно дальнейшее развитие этого метода, например когда имеется несколько конкурирующих линий L_j, $j = 1, \ldots, m$, при той же или более общей фиксированной области Ω.

1. *Зморович В. А., Гудзь Л. А.* Про один метод теории экстремальных задач.—Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 8, с. 19—21.
2. *Зморович В. А., Якубенко А. А.* О границе α-выпуклости порядка γ класса $S_\beta^*(m)$.—Докл. АН УССР, Сер. А., 1981, № 10, с. 6—9.
3. *Зморович В. А.* Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій.— Доп. АН УРСР, Сер. А., 1965, № 8, с. 980—984.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
21.02.81