УДК 517.9

А. Ф. Иванов

Некоторые теоремы сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с отклоняющимися аргументами

Рассмотрим два дифференциальных уравнения второго порядка с отклоняющимися аргументами

$$x''(t)+p(t)f(x(\tau(t)))=0, \tag{1}$$

$$x''(t)+q(t)g(x(\theta(t)))=0 \tag{2}$$

в предположении, что $p(t)$, $q(t)$ — непрерывные и неотрицательные на полуоси $t\geqslant t_0$ функции, $f(z)$, $g(z)$ — непрерывные функции при $z\in R$, монотонно возрастающие в некоторой окрестности бесконечности $|z|\geqslant z_0\geqslant 0$ и удовлетворяющие условию $\operatorname{sgn} f(z)=\operatorname{sgn} g(z)=\operatorname{sgn} z$, отклоняющиеся аргументы $\tau(t)$ и $\theta(t)$ непрерывны при $t\geqslant t_0$ и удовлетворяющие условию $\lim\limits_{t\to+\infty}\tau(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t)=+\infty$.

Нетривальное решение уравнения (1) (или (2)) называется осциллирующим, если оно имеет сколь угодно большие нули. В противном случае решение называется неосциллирующим.

Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений ($\tau(t)\equiv\theta(t)\equiv t$, $f(z)\equiv g(z)\equiv z$) хорошо известная теорема сравнения позволяет утверждать, что если $q(t)\geqslant p(t)$, то из осцилляции всех решений уравнения (1) следует осцилляция всех решений уравнения (2) [1, с. 253]. Представляет интерес установление теорем-аналогов на случай двух дифференциально-функциональных уравнений (1) и (2). Некоторые результаты такого рода для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом известны (см. [2—5]).

Заметим, что аналог теоремы сравнения должен иметь новое содержание при сравнении дифференциально-функциональных уравнений (1), (2), поскольку непосредственный ее перенос несправедлив (см. [2]).

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнения

$$x''(t)+[(1+\varepsilon)/4t^2]\,x(t)=0, \tag{3}$$

$$x''(t)+[\alpha(1-\alpha)/t^2]\,t^{\frac{\alpha}{2}}\,x(t^{\frac{1}{2}})=0, \tag{4}$$

где $\varepsilon>0$, $0<\alpha<1$.

Все решения уравнения (3) осциллируют, и при достаточно больших t выполняется

$$\frac{\alpha(1-\alpha)}{t^2}\,t^{\frac{\alpha}{2}}>\frac{1+\varepsilon}{4t^2},$$

однако уравнение (4) имеет неосциллирующее решение $x(t)=ct^{\alpha}$, $c=\mathrm{const}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть при* $t\geqslant t_1\geqslant t_0$, $|z|\geqslant z_1\geqslant z_0$ *выполняются условия* $q(t)\geqslant p(t)$, $\theta(t)\geqslant\tau(t)$, $|g(z)|\geqslant|f(z)|$. *Тогда из осцилляции всех решений уравнения* (1) *следует осцилляция всех решений уравнения* (2).

Докажем, что наличие неосциллирующего решения у уравнения (2) гарантирует существование такого же у уравнения (1).

Для заданного отклоняющегося аргумента $\tau(t)$ и произвольной точки $T \geqslant t_0$ определим подмножество точек оси $E_T(\tau) = \{\tau(t) / \tau(t) < T$ при $t \geqslant T$. $E_T(\tau)$ может быть и пустым. Справедлива следующая

Лемма 1. *Если уравнение* (2) *имеет ограниченное неосциллирующее решение, то оно имеет и сколь угодно большие ограниченные неосциллирующие решения.*

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, предположим, что $0 < x_0(t) < N$, $t \geqslant t_0$,— решение уравнения (2). Тогда при достаточно больших T $(\theta(T) \geqslant t_0)$ это решение удовлетворяет интегральному уравнению

$$x_0(t) = \begin{cases} x_0(T) + \int\limits_T^t (s-T)\, q(s)\, g(x_0(\theta(s)))\, ds + (t-T) \times \\ \qquad \times \int\limits_t^\infty q(s)\, g(x_0(\theta(s)))\, ds, \quad t \geqslant T \\ x_0(t), \quad t \in E_T(\theta). \end{cases} \tag{5}$$

Для произвольного $M > 0$, такого, что $M/2 \geqslant z_0$, выберем $T_0 \geqslant t_0$ так, чтобы $\theta(s) \geqslant t_0$ при $s \geqslant T_0$ и

$$\sup\{g(z),\ z \in [M/2,\ M]\} \left[\int\limits_{T_0}^t (s-T_0)\, q(s)\, ds + (t-T_0) \int\limits_t^\infty q(s)\, ds\right] < M$$

$$\text{при всех } t \geqslant T_0. \tag{6}$$

В силу ограниченности сверху решения $x_0(t)$ и, следовательно, сходимости интеграла $\int\limits_T^\infty sq(s)\, ds$ это всегда можно сделать.

Определим последовательность функций

$$y_0(t) = M/2,\ t \in E_{T_0}(\theta) \cup \{t \mid t \geqslant T_0\},$$

$$y_{m+1}(t) = \begin{cases} M/2 + \int\limits_{T_0}^t (s-T_0)\, q(s)\, g(y_m(\theta(s))) + \\ + (t-T_0) \int\limits_t^\infty q(s)\, g(y_m(\theta(s)))\, ds, \quad t \geqslant T_0, \\ M/2,\ t \in E_{T_0}(\theta), \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{7}$$

Из монотонности функции $g(z)$ при $|z| \geqslant z_0$ и условия (4) находим $M/2 \leqslant y_0(t) \leqslant y_1(t) \leqslant y_2(t) \leqslant \ldots \leqslant y_m(t) \leqslant \ldots \leqslant M$. Отсюда следует, что существует предельная дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(t) = \lim\limits_{m\to\infty} y_m(t)$, удовлетворяющая интегральному уравнению (7), а значит, и дифференциальному уравнению (2) и условию $M/2 \leqslant y(t) \leqslant M$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $0 < x_0(t)$, $t \geqslant t_0$, неосциллирующее решение уравнения (2). Очевидно, что существует $t_2 \geqslant t_0$ такое, что $x_0(t)$ — монотонно возрастающая функция при $t \geqslant t_2$. В силу леммы 1 можно считать, что при всех $t \geqslant t_2 \geqslant t_1$, $x_0(t) \geqslant z_1$, $x_0(\theta(t)) \geqslant z_1$, $x_0(\tau(t)) \geqslant z_1$. Тогда $x_0(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$x_0(t) = x_0(t_2) + k(t-t_2) + \int\limits_{t_2}^t (s-t_2)\, q(s)\, g(x_0(\theta(s)))\, ds +$$

$$+ (t-t_2) \int\limits_t^\infty q(s)\, g(x_0(\theta(s)))\, ds, \quad t \geqslant t_2, \tag{8}$$

где $k=\lim\limits_{t\to+\infty} x_0'(t)$. Положим

$$x_{m+1}(t)=\begin{cases} x_0(t_2)+k(t-t_2)+\int\limits_{t_2}^{t}(s-t_2)\,p(s)\,f(x_m(\tau(s)))\,ds+ \\ +(t-t_2)\int\limits_{t}^{\infty}p(s)\,f(x_m(\tau(s)))\,ds, \quad t\geqslant t_2 \\ x_0(t), \ t\in E_{t_2}(\tau), \qquad m=0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{9}$$

Используя условие теоремы 1 монотонность $x_0(s)$ и $f(z)$ при $|z|\geqslant z_1$, получаем $x_1(t)\leqslant x_0(t)$, $t\geqslant t_2$. Далее находим $x_2(t)\leqslant x_1(t)$ и вообще $x_{m+1}(t)\leqslant x_m(t)$, $m=0, 1,2,\ldots$, $t\geqslant t_2$. Кроме того, $x_m(t)\geqslant x_0(t_2)+k(t-t_2)$. Таким образом, последовательность функций $x_m(t)$ сходится равномерно на каждом конечном промежутке к некоторой предельной дважды непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$, которая является решением интегрального уравнения (9), а значит, и дифференциального (1). Случай $x_0(t)<0$ аналогичен. Теорема доказана.

Следующее утверждение позволяет сравнивать осцилляционное поведение решений уравнений (1) и (2) в случае, когда $\tau(t)\geqslant\theta(t)$, функция $g(z)$ — суперлинейная, а $f(z)$ — сублинейная.

Теорема 2. *Пусть при $t\geqslant t_1\geqslant t_0$, $|z|\geqslant z_1\geqslant z_0$ выполняются условия $\theta(t)\leqslant\tau(t)$, $\tau(t)p(t)\leqslant\theta(t)g(t)$, $|f(z)|\leqslant|z|\leqslant|g(z)|$. Тогда из осцилляции всех решений уравнения* (1) *следует осцилляция всех решений уравнения* (2).

Нам понадобится вспомогательнос утверждение.

Лемма 2. *Если $0<x_0(t)$ — решение уравнения* (2), *удовлетворяющее условию $\lim\limits_{t\to+\infty} x_0'(t)=0$, то при достаточно больших t $x_0(t)/t$ монотонно убывает.*

Доказательство. Действительно, учитывая, что $x_0'(t)$ положительна и монотонно стремится к нулю (для положительного решения), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_0(t)}{t}\right)=\frac{tx_0'(t)-x_0(t)}{t^2}=\frac{tx_0'(t)-\int\limits_{T}^{t}x_0'(s)\,ds-x_0(T)}{t^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{tx_0'(t)-(t-T)\,x_0'(t)-x_0(T)}{t^2}=\frac{Tx_0'(t)-x_0(T)}{t^2}.$$

Последнее выражение отрицательно при достаточно больших t. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Покажем, что если уравнение (2) обладает неосциллирующим решением, то и уравнение (1) также имеет неосциллирующее решение.

Пусть $0<x_0(t)$ — неосциллирующее решение уравнения (2). Тогда оно удовлетворяет интегральному уравнению (8). Предположим, что $k=\lim\limits_{t\to+\infty} x_0'(t)=0$. Тогда в (8) t_2 можно взять столь большим, что $x_0(\theta)/\theta$ убывает по θ при $t\geqslant t_2$. Кроме того, в силу леммы 1 можно считать, что $x_0(\theta(t))\geqslant z_1$, $x_0(\tau(t))\geqslant z_1$, $x_0(t)\geqslant z_1$. Определим последовательность $x_{m+1}(t)$, как и в (9). Тогда получим при $s\geqslant t_2$

$$p(s)\,f(x_0(\tau(s)))\leqslant q(s)\,\frac{\theta(s)\,f(x_0(\tau(s)))}{\tau(s)\,g(x_0(\theta(s)))}\,g(x_0(\theta(s)))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\theta(s)\,x_0(\tau(s))}{\tau(s)\,x_0(\theta(s))}\,q(s)\,g(x_0(\theta(s)))\leqslant q(s)\,g(x_0(\theta(s))),$$

так как $x_0(z)/z$ убывает и $\theta(t)\leqslant\tau(t)$. Теперь из (9) легко находим $x_1(t)\leqslant x_0(t)$. Совершенно аналогично получаем $x_{m+1}(t)\leqslant x_m(t)$, $m=0, 1, 2,\ldots$

Кроме того, $x_m(t) \geqslant x_0(t_2)$. Как и в случае теоремы 1, заключаем, что уравнение (1) обладает положительным решением.

Теперь предположим, что $k = \lim\limits_{t\to+\infty} x_0'(t) > 0$. Возьмем t_2 таким, чтобы при $t \geqslant t_2$ выполнялось $\frac{x_0(\tau(t))}{\tau(t)} \frac{\theta(t)}{x_0(\theta(t))} \leqslant 1+\varepsilon$, где ε — положительное малое число, такое, что $(1+\varepsilon)k - \varepsilon x_0'(t_2) > 0$. Положим

$$x_{m+1}(t) = \begin{cases} x_0(t_2) + l(t-t_2) + \int\limits_{t_2}^{t} (s-t_2)\,p(s)\,f(x_m(\tau(s)))\,ds + \\ + (t-t_2)\int\limits_{t}^{\infty} p(s)\,f(x_m(\tau(s)))\,ds, \quad t \geqslant t_2, \\ x_0(t), \quad t \in E_{t_2}(\tau), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где $0 < l < (1+\varepsilon)k - \varepsilon x_0'(t_2)$.

Имеем

$$p(s)\,f(x_0(\tau(s))) \leqslant q(s)\frac{\theta(s)\,f(x_0(\tau(s)))}{\tau(s)\,g(x_0(\theta(s)))}\,g(x_0(\theta(s))) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\theta(s)\,x_0(\tau(s))}{\tau(s)\,x_0(\theta(s))}\,q(s)\,g(x_0(\theta(s))) \leqslant (1+\varepsilon)\,q(s)\,g(x_0(\theta(s))).$$

Используя последнее неравенство, получим $x_1(t) \leqslant x_0(t_2) + l\ t - t_2) + (1+\varepsilon)[x_0(t) - x_0(t_2) - k\,(t-t_2)] \leqslant x_0(t) + \varepsilon\,(x_0(t) - x_0(t_2) - x\,((t_2)(t-t_2)) \leqslant x_0(t)$. Как и раньше, убеждаемся, что последовательность $x_m(t)$, $m = 0,1,2,\ldots$,— монотонно убывающая и предельная функция удовлетворяет уравнению (1). Случай $x_0(t) < 0$ аналогичен. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Рассмотрим два уравнения*

$$x''(t) + p(t)\,x\,\tau(t)) = 0, \tag{10}$$

$$x''(t) + q(t)\,x(\theta(t)) = 0, \tag{11}$$

где функции $p(t)$, $q(t)$, $\tau(t)$, $\theta(t)$ *такие же, как и для уравнений* (1), (2).

Тогда, если $\theta(t) \leqslant \tau(t)$, $p(t)\tau(t) \leqslant q(t)\theta(t)$, *то из осцилляции всех решений уравнения* (10) *следует осцилляция всех решений уравнения* (11) (см. [2]).

Заметим, что условия $\theta(t) \geqslant \tau(t)$, $\theta(t)q(t) \geqslant \tau(t)p(t)$, $|\,g(z) \geqslant |z| \geqslant |\,f(z)\,|$ не позволяют сделать вывод, что из осцилляции всех решений уравнения (1) следует осцилляция всех решений уравнения (2). Действительно, для уравнений

$$x''(t) + \frac{1+\varepsilon}{4t^2}\,x(t) = 0, \tag{12}$$

$$x''(t) + \frac{1}{8t^2}\,x(4t) = 0 \tag{13}$$

при $0 < \varepsilon < 1$ эти условия выполнимы, все решения уравнения (12) осциллируют, в то время как уравнение (13) имеет неосциллирующее решение $x(t) = c\,t^{\frac{1}{2}}$, $c = \mathrm{const}$.

Теоремы 1 и 2 не дают возможности сравнивать осцилляционное поведение решений уравнений (1) и (2) в случае, когда $\theta(t) - \tau(t)$ меняет знак при $t \to +\infty$. Однако известно, что если при этом $q(t) \equiv p(t)$, $g(z) \equiv f(z)$, $\sup\{|\theta(t) - \tau(t)|,\ t \geqslant t_0\} < \infty$, то все решения уравнений (1) и (2) или осциллируют, или не осциллируют одновременно (см. [5]).

1. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1958.—468 с.
2. *Шевело В. Н.* Об одном методе сравнения для изучения колебательных решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием.— Nonlinear Vibration Problems, 1975, 16, с. 97—105.

3. *Oláh J.* Note on oscillation of linear delay differential equations.— Arch. Mat., 1980, **16**, N 4, p. 213—216.
4. *Philos Ch. G.* A comparation result in oscillation theory.— Indiana J. pura and appl. Math. 1980, 11, № 1, p. 1—7.
5. *Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений некоторых классов неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Тбилиси, 1980.— 26 с.

Институт математики АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию
21.02.82