УДК 517.917

И. А. Павлюк

Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + p_1(t)\,y^{(n-1)} + p_2(t)\,y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(t)\,y' + p_n(t)\,y = 0, \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $p_i(t)$, $i=\overline{2,n}$, определенными на интервале $0 < t_0 \leqslant t < \infty$ и $p_1(t) \in C^{(n-1)}[t_0, \infty)$.

В работе получены достаточные коэффициентные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову решений уравнений (1).

После замены

$$y = \alpha(t) z = \exp\left(-\frac{1}{n}\int_{t_0}^{t} p_1(\tau)\, d\tau\right) z \tag{2}$$

получим уравнение

$$z^{(n)} + q_2(t) z^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1}(t) z' + q_n(t) z = 0, \tag{3}$$

где

$$q_2 = p_2 + \frac{1}{\alpha}\left[\frac{n(n-1)}{2}\alpha'' + (n-1) p_1 \alpha'\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{n-1} = p_{n-1} + \frac{1}{\alpha}[n\alpha^{(n-1)} + (n-1) p_1 \alpha^{(n-2)} + (n-2)\alpha^{(n-3)} + \ldots + 2p_{n-2}\alpha'],$$

$$q_n = p_n + \frac{1}{\alpha}[\alpha^{(n)} + p_1\alpha^{(n-1)} + p_2\alpha^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}\alpha']. \tag{4}$$

Введем векторы $h = \mathrm{col}(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, $x = \mathrm{col}(z, z', \ldots, z^{(n-1)})$. В силу (2) они связаны между собой линейной зависимостью

$$h = T(t) x, \tag{5}$$

где матрица T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha^{(n-2)} & \binom{n-2}{1}\alpha^{(n-3)} & \binom{n-2}{2}\alpha^{(n-4)} & \ldots\ \alpha & 0 \\ \alpha^{(n-1)} & \binom{n-1}{1}\alpha^{(n-2)} & \binom{n-1}{2}\alpha^{(n-3)} & \ldots \binom{n-1}{n-2}\alpha' & \alpha \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Очевидно, что вектор x удовлетворяет системе уравнений

$$dx/dt = A(t) x + Bx, \tag{7}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$a_1(t) = -q_n(t), \quad a_2(t) = -q_{n-1}(t), \ldots, a_{n-1}(t) = -q_2(t),$$

а B — матрица порядка $n \times n$, в которой $b_{12} = b_{23} = \ldots = b_{n-1n} = 1$, а все остальные элементы равны нулю.

Произведем в системе (7) замену

$$x = U(t) v \tag{9}$$

с матрицей

$$U = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \ldots t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \ldots t^{n-2}/(n-2)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Тогда, учитывая тождества $\dot{U} = BU$ и $U^{-1}(t) = U(-t)$, получим

$$dv/dt = U(-t) A(t) U(t) v. \tag{11}$$

Имеет место равенство

$$U(-t)\,A(t) = M(t)\,A_1(t), \tag{12}$$

где $M=[m_{nk}]$ — диагональная матрица, $k=\overline{1, n}$, с элементами

$$m_{nk}=(-1)^{n-k}t^{n-k}/(n-k)!, \quad k=1, \overline{n-1}, \quad m_{nn}=1, \tag{13}$$

а A_1 — матрица порядка $n\times n$ с одинаковыми строками, а именно $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, 0]$.

Учитывая (12), получим уравнение

$$dv/dt = M(t)\,A_1(t)\,U(t)\,v. \tag{14}$$

После замены

$$v = M(t)\,w \tag{15}$$

получим

$$dw/dt = A_1(t)\,U(t)\,M(t)\,w - M^{-1}(t)\,M'(t)\,w. \tag{16}$$

Оказывается, что система уравнений

$$dr/dt = A_1(t)\,U(t)\,M(t)\,r, \qquad r=\operatorname{col}(r_1, r_2, \dots, r_n) \tag{17}$$

решается в явном виде.

Действительно, легко проверить, что система (17) состоит из уравнений с одинаковыми правыми частями:

$$dr_i/dt = b_1(t)\,r_1 + b_2(t)\,r_2 + \dots + b_n(t)\,r_n, \quad i=\overline{1, n}, \tag{18}$$

где

$$b_1 = m_{n1}a_1,$$

$$b_k = m_{nk}\left(\frac{a_1t^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{a_2t^{k-2}}{(k-2)!} + \dots + a_{k-1}t + a_k\right), \quad k=\overline{2, n-1}, \tag{19}$$

$$b_n = \frac{a_1t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{a_2t^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{a_{n-2}t^2}{2!} + a_{n-1}t.$$

Из (18) находим равенства $r_n = r_{n-1} = \dots = r_2 = r_1$, и, следовательно,

$$r_2(t) = r_1(t) + c_2, \quad r_3(t) = r_1(t) + c_3, \dots, r_n(t) = r_1(t) + c_n, \tag{20}$$

где c_i, $i=\overline{2, n}$,— произвольные постоянные.

Подставив значения r_i, $i=\overline{2, n}$, из (20) в первое уравнение (18), получим

$$dr_1/dt = (b_1 + b_2 + \dots + b_n)\,r_1 + c_2b_2 + c_3b_3 + \dots + c_nb_n. \tag{21}$$

Легко показать, что

$$b_1(t) + b_2(t) + \dots + b_n(t) \equiv 0. \tag{22}$$

В силу этого из (21) получаем

$$r_1(t) = c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + \dots + c_n\varphi_n + c_1, \tag{23}$$

где

$$\varphi_k(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} b_k(\tau)\,d\tau, \quad k=\overline{2, n}, \tag{24}$$

а c_1 — произвольная постоянная.

Подставляя (23) в (20), получаем

$$\begin{aligned} r_1 &= c_1 + c_2\varphi_2 + \dots + c_n\varphi_n, \\ r_2 &= c_1 + c_2(1+\varphi_2) + \dots + c_n\varphi_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{25}$$

Этим показано, что система (17) имеет фундаментальную матрицу решений

$$R(t, t_0)=\begin{bmatrix} 1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_{n-1} & \varphi_n \\ 1 & 1+\varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_{n-1} & \varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & 1+\varphi_{n-1} & \varphi_n \\ 1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \cdots & \varphi_{n-1} & 1+\varphi_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

Отсюда на основании (22) заключаем, что

$$\det R(t, t_0) = 1. \quad (27)$$

Наконец, произведем в (16) замену

$$w = R(t, t_0)\, s. \quad (28)$$

Тогда относительно вектора s получим уравнение

$$ds/dt = (-1/t)\, R^{-1}(t, t_0)\, KR(t, t_0)\, s,$$

где K — диагональная матрица вида $K = [n - e]$, $e = \overline{1,\ n}$. Запишем последнюю систему в интегральном виде

$$s(t) = s(t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{R^{-1}(\tau)\, KR(\tau)\, s(\tau)\, d\tau}{\tau}, \quad t_0 > 0. \quad (29)$$

Теперь предположим, что выполняются условия

$$\int_{t_0}^{\infty} |b_k(\tau)|\, d\tau < \infty, \quad k = \overline{2, n}. \quad (30)$$

Тогда для нормы матриц R и R^{-1} (с учетом (27)) будут иметь место оценки

$$|R(\infty, t_0)| \leqslant l_1, \quad |R^{-1}(\infty, t_0)| \leqslant l_2, \quad (31)$$

где l_1 и l_2 — некоторые положительные постоянные. Переходим в (29) к оценке по норме. При выполнении (30) получаем

$$|s(t)| \leqslant |s(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \frac{m_0}{\tau}\, |s(\tau)|\, d\tau,$$

где m_0 — положительная постоянная. Из последнего неравенства на основании обобщенной леммы Гронуолла—Беллмана выводим оценки [1]:

$$\delta_1 t^{-m_0} \leqslant |s(t)| \leqslant \delta_2 t^{m_0}; \quad t \geqslant t_0 > 0, \quad \delta_1 = t_0^{m_0} |s(t_0)|, \quad \delta_2 = t_0^{-m_0} |s(t_0)|. \quad (32)$$

Учитывая замены (5), (9), (15) и (28), находим

$$h(t) = T(t)\, U(t)\, M(t)\, R(t)\, s(t), \quad (33)$$

Оценка по норме дает

$$|h(t)| \leqslant \alpha\, |\alpha^{-1} T|\, |UM|\, |R|\, |s|. \quad (34)$$

Пусть при $t \geqslant t_0$

$$|\alpha^{-1} T| \leqslant d_0 + d_1 t^{\gamma_1}, \quad (35)$$

где $d_0 > 0$, $\gamma_1 > 0$, $d_1 \geqslant 0$ — некоторые постоянные. Кроме того, очевидно, имеет место неравенство

$$|UM| \leqslant P_{n-1}(t), \quad t \geqslant t_0, \quad (36)$$

где P_{n-1} — полином степени $n-1$ с положительными коэффициентами.

Если воспользоваться оценками (31), (32), (35) и (36), то из (34) получим

$$|h(t)| \leqslant l_1 \delta_2 t^{m_0} P_{n-1}(t)(d_0 + d_1 t^{\gamma_1}) \alpha(t), \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{37}$$

Введем функцию $\alpha(t) t^{\gamma}$, где γ — любое положительное число. Предположим, что

$$\alpha(t) t^{\gamma} \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{38}$$

При этом из (37) видно, что $|h(t)| \to 0$ при $t \to \infty$. А это означает, что решения уравнения (1) асимптотически устойчивы. С другой стороны, из (33) находим $s(t) = R^{-1} M^{-1} U^{-1} T^{-1} h(t)$. Отсюда в силу (32) вытекает оценка

$$\frac{1}{\alpha} |\alpha T^{-1}| \, | M^{-1} U^{-1} | \, | R^{-1} | \, | h(t) | \geqslant \delta_1 t^{-m_0}, \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{39}$$

Предположим, что при $t \geqslant t_0$

$$| \alpha T^{-1} | \leqslant N_0 + N_1 t^{\gamma_2}, \tag{40}$$

где $N_0 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $N_1 \geqslant 0$ — некоторые постоянные. Ясно, что

$$| M^{-1} U^{-1} | \leqslant N_2, \quad t \geqslant t_0, \tag{41}$$

где N_2 — положительная постоянная. Из (39) на основании (31), (40), и (41) выводим оценку

$$|h(t)| \geqslant \frac{\delta_1}{l_2 N_2} \frac{t^{-m_0-\gamma_2}}{N_1 + N_0 / t^{\gamma_2}} \alpha(t), \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{42}$$

Теперь потребуем чтобы функция $\alpha(t) t^{-\gamma} \to \infty$ при $t \to \infty$. Тогда из (42) получим, что $|h(t)| \to \infty$ при $t \to \infty$. Отсюда заключаем, что решения уравнения (1) будут неустойчивыми. Этим доказаны теоремы.

Теорема 1. *Пусть имеем уравнение* (1) *и предположим, что выполняются*: а) *условия* (30), *где функции* $b_i(t)$, $i = \overline{2, n}$, *определяются равенствами* (19); б) *оценка* (35), *где* $T(t)$ — *матрица вида* (6); в) *условие* (38), *где* γ — *произвольное положительное число.*

Тогда решения уравнения (1) *асимптотически устойчивы (неравномерно относительно* t_0*).*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия а) теоремы* 1, *оценка* (40) *и условие* $\alpha(t) t^{-v} \to \infty$ при $t \to \infty$.

Тогда решения уравнения (1) *неустойчивы.*

Замечание. Теоремы 1 и 2 остаются в силе, если условия (30) заменить более простыми, но более ограничительными условиями вида

$$\int_{t_0}^{\infty} t^{n-k} |q_{n-k+1}(t)| \, dt < \infty, \qquad k = \overline{1, n-1}.$$

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.

Киевский
госуниверситет

Поступила в редакцию
27.01.82